Soit les suites (a_n) et (b_n) telles que $a_0 = 2$, $b_0 = 4$ et $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 3b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{4}(3a_n + b_n) \end{cases}$, pour tout entier naturel.

1/ Soit la suite (u_n) telle que $u_n = a_n + b_n$ pour tout entier naturel.

Montrer que la suite (u_n) est constante, et donner la valeur de u_n .

$u_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 3b_n) + \frac{1}{4}(3a_n + b_n) = \frac{1}{4}(4a_n + 4b_n) = a_n + b_n = u_n$.

La suite (u_n) est bien constante, puisque $u_{n+1} = u_n$, dont on déduit $u_n = u_0 = a_0 + b_0 = 6$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2/ Soit la suite (v_n) telle que $v_n = a_n - b_n$ pour tout entier naturel.

Montrer que la suite (v_n) est géométrique et convergente.

$v_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 3b_n) - \frac{1}{4}(3a_n + b_n) = \frac{1}{4}(-2a_n + 2b_n) = -\frac{1}{2}(a_n - b_n) = -\frac{1}{2}v_n$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$.

Calculer v_n en fonction de n , et sa limite lorsque n tend vers l'infini.

$v_n = v_0\, q^n = (a_0 - b_0)\, q^n = -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Comme $|q| < 1$, on déduit que (v_n) converge vers 0 .

3/ Exprimer a_n et b_n en fonction de n .

$$\begin{cases} u_n = a_n + b_n \\ v_n = a_n - b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \frac{1}{2}(u_n + v_n) = 3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ b_n = \frac{1}{2}(u_n - v_n) = 3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{cases} .$$

Montrer qu'ils admettent une limite commune que l'on déterminera.

Comme $\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$, on déduit : $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = +3$.

4/ Les suites (a_n) et (b_n) sont-elles adjacentes ?

Deux suites u et v sont *adjacentes* si et seulement si :

a) La suite u est croissante et la suite v décroissante.

b) Pour tout entier naturel, $u_n < v_n$.

c) $\lim_{n \to \infty} (v_n - u_n) = 0$.

Seul le point c) est vérifié par les suites (a_n) et (b_n) .

Ainsi : $a_n - b_n = -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ change de signe selon la parité de n , ce qui contredit le point b .

Les suites ne sont pas adjacentes.