Les suites géométriques

Une suite numérique u est dite ***géométrique*** si et seulement si chacun de ses termes est égal au précédent ***multiplié*** par une valeur constante $q \neq 0$, appelée ***raison*** de la suite.

$$u \text{ géométrique} \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n \,.\, q \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = q = \mathrm{C^{te}} \;, \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi $(-16 , +4 , -1 , +\frac{1}{4} , -\frac{1}{16} , +\frac{1}{64} .....)$ forment une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{4}$.

Exemple : Soit u telle que $u_n = 3.(2^n)$ (forme *fonctionnelle*). Montrons que u est géométrique.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3.(2^{n+1})}{3.(2^n)} = +2$. La suite u est géométrique, de raison $q = +2$.

Relation entre deux termes d'une suite géométrique : $u_n = u_p \,.\, q^{(n-p)}$

Ainsi $u_4 = u_3 \,.\, q$, $u_9 = u_5 \,.\, q^4$, $u_6 = u_8 \,.q^{-2} = \frac{u_8}{q^2}$. (Il suffit d'ajuster, dans la puissance, le nombre de raisons entre n et p).

Présentation récurrente d'une suite géométrique

Il faut connaître ***un terme***, pour amorcer la récurrence, et la ***raison***, pour passer d'un terme au suivant :

Exemple : $\begin{cases} u_0 = +3 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2} u_n \end{cases}$, suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$.

Présentation fonctionnelle d'une suite géométrique

Par la relation exprimant un terme u_n en fonction d'un autre u_p , on calcule en général le terme *général* u_n de la suite, en fonction du premier terme u_1 ou u_0 de cette suite.

$$u_n = u_0.q^n \quad \text{ou} \quad u_n = u_1.q^{n-1} .$$

Exemple précédent : $u_n = 3.(-\frac{1}{2})^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. *Attention* : « **-1** » doit rester dans la puissance.

Convergence ou Divergence d'une suite géométrique :

Si $|q| < 1$, la suite ***géométrique*** est ***convergente* vers 0** : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Si $|q| > 1$, la suite ***géométrique*** est ***divergente*** : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$

Multiplier par **-0,5** revient à diviser par **-2**, et multiplier par **+0,33** à diviser par +3 .

Donc ***multiplier*** par q tel que $|q| < 1$ équivaut à ***diviser***, ce qui justifie qu'en définitive $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Exemple : $(-16 , +4 , -1 , +\frac{1}{4} , -\frac{1}{16} , +\frac{1}{64} .....) \to 0$, avec $q = -\frac{1}{4} = -0{,}25$.

A l'inverse : Multiplier par **-3** ou par **+2**, soit par q tel que $|q| > 1$, rend les termes de la suite de plus en plus grands en valeur absolue, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$. *Exemple* : $(-\frac{1}{4} , -\frac{1}{2} , -1 , -2 , -4 , -8 .....) \to -\infty$, avec $q = +2$.

Suite géométrique de 3 termes : (a, b, c) **sont en suite** ***géométrique*** $\Leftrightarrow$ $b^2 = a\,.\,c$

$b = a\,.\,q$ et $b = \dfrac{c}{q}$ entraînent bien $b.b = (a\,.\,q)(\dfrac{c}{q})$, soit $b^2 = a.c$.

Somme des termes d'une suite géométrique finie :

On démontre par récurrence :

$$u \text{ suite } \textit{géométrique} \Rightarrow S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n = u_1.\frac{1-q^n}{1-q} \text{ , si } q \neq 1.$$

La formule est *dangereuse* :

Se souvenir que n est le ***nombre de termes*** , et u_1 le *premier terme.*

Somme infinie des termes d'une suite géométrique convergente :

Une suite géométrique est convergente ***si et seulement si*** **(*ssi*)** $|\,q\,| < 1$.

Dans ce cas, q^n devient de plus en plus petit lorsque n augmente : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

On déduit, en poussant la formule à sa limite $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n = u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q}$, que la **somme infinie des termes est** $S = \dfrac{u_1}{1-q}$.

Ainsi : $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{32} + \ldots$ infiniment … $= \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = +2$.

Le résultat est *fini* malgré une somme infinie.