Soit la suite numérique u telle que $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 1 \end{cases}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit la suite v telle que $v_n = u_n - 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Vérifier que la suite v est géométrique. En préciser la raison q et le premier terme v_0 .

$v_n = u_n - 2 \iff u_n = v_n + 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Reportons dans la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 1$.

$v_{n+1} + 2 = \frac{1}{2}(v_n + 2) + 1 \iff v_{n+1} + 2 = \frac{1}{2} v_n + 2 \iff v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite v est géométrique, de raison $q = +\frac{1}{2}$, et $v_0 = u_0 - 2 = -2$.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

On cherche la forme fonctionnelle de v , soit $v_n = v_0.q^n \iff v_n = -2\left(\frac{1}{2}\right)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Sachant $u_n = v_n + 2$, on déduit : $u_n = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

v est géométrique, de raison $q = +\frac{1}{2}$, soit $|q| < 1$. On déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Comme $u_n = v_n + 2$, on déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = (\lim\limits_{n \to +\infty} v_n) + 2$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +2$.