Soit la suite (u_n) telle que $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$, pour tout entier naturel n .

Montrer par récurrence que : $u_n \leq 2$, pour tout entier naturel n .

Soit la relation $P_n : u_n \leq 2 , \forall n \in \mathbb{N}$.

a) P_0 est vraie, puisque $u_0 = 1 \leq 2$.

b) Supposons P_n vraie ($u_n \leq 2$) . Peut-on en déduire P_{n+1} vraie ($u_{n+1} \leq 2$) ?

$u_n \leq 2 \Rightarrow 2 + u_n \leq 4 \Rightarrow \sqrt{2 + u_n} \leq 2$, soit : $u_{n+1} \leq 2$.

c) *Conclusion* : P_0 vraie entame la récurrence, et (P_n vraie $\Rightarrow$ P_{n+1} vraie) la poursuit pour tout n entier.

Donc : $P_n : u_n \leq 2$ est vraie , $\forall n \in \mathbb{N}$.