Toutes les réponses, ou aucune, peuvent être vraies.

Indiquer par V ou F , la validité des réponses proposées.

Les calculatrices sont interdites.

Soit f la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln(2x) + 1 - x$. Alors :

a) **$f(1) > 0$ VRAI**

$f(1) = \ln(2) + 1 - 1 = \ln(2) \approx 0{,}693 > 0$.

b) **Pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1-x}{x}$ VRAI**

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2}{2x} - 1 = \dfrac{2-2x}{2x} = \dfrac{2(1-x)}{2x} = \dfrac{1-x}{x}$.

c) **f est strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$ VRAI**

$x \geq 1 \Rightarrow 1 - x < 0$, d'où $f'(x) = \dfrac{1-x}{x} \leq 0$.

d) **$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ VRAI**

$f(x) = \ln(2x) + 1 - x$ est de forme indéterminée $\infty - \infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

$f(x) = \ln(2) + \ln(x) + 1 - x = 1 + \ln(2) + \ln(x) - x = 1 + \ln(2) + x\left(\dfrac{\ln(x)}{x} - 1\right)$.

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 + \ln(2) - \lim\limits_{x \to +\infty} x = -\infty$.

e) **Il existe un unique réel $a \in [1\,;+\infty[$ tel que $a = \ln(2a) + 1$ FAUX**

$a = \ln(2a) + 1 \Leftrightarrow \ln(2a) + 1 - a = 0 \Leftrightarrow f(a) = 0$.

f est continue, strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$, telle que $f(1) > 0$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe $a \in [1\,;+\infty[$ unique, tel que $f(a) = 0$.