Toutes les réponses, ou aucune, peuvent être vraies.

Indiquer par V ou F , la validité des réponses proposées.

Les calculatrices sont interdites.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 4$.

On pose g la fonction telle que $g(x) = f\left(x+\frac{1}{2}\right) - f(x) - 2$. Alors …..

a) **g est continue sur $\mathbb{R}$ VRAI**

g nécessite la composition de f et de $x+\frac{1}{2}$, elles mêmes fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

On conclue que g est continue sur $\mathbb{R}$.

b) **$g(0) < 0$ FAUX**

Les seules informations de l'énoncé sont que f est continue, que $f(0) = 0$ et que $f(1) = 4$, propriétés qui sont vérifiées par $f(x) = 4x$, proposée en e) . Or, pour $f(x) = 4x$, on a $g(0) = f(\frac{1}{2}) - f(0) = 2 - 0 = 2$.

c) **$g(0).g\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0$ VRAI**

$g(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) - 2 = f\left(\frac{1}{2}\right) - 2$, tandis que $g\left(\frac{1}{2}\right) = g(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = 2 - f\left(\frac{1}{2}\right)$.

On constate que $g\left(\frac{1}{2}\right) = - g(0)$, soit $g(0).g\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0$.

d) **Il existe c réel, tel que $f\left(c+\frac{1}{2}\right) - f(c) = 2$ VRAI**

D'après c) , $g(0)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)$ sont de signes contraires. D'après a), g étant continue, le théorème de la valeur intermédiaire permet d'affirmer qu'il existe $c \in [0\,;\frac{1}{2}]$ tel que $g(c) = 0$, soit $f\left(c+\frac{1}{2}\right) - f(c) = 2$.

e) **Pour tout x réel, $f(x) = 4x$ FAUX**

$f(x) = 4x$ est la fonction linéaire vérifiant les conditions de l'énoncé, mais ce n'est pas la seule solution.

Toute fonction f continue, telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 4$ convient, comme $f(x) = 4x^2$.