Soit l'équation (E_m) : $x^2 - (2m+3)x + m^2 + 5 = 0$.

Déterminer m pour que les racines x' et x'' de l'équation vérifient $|x' - x''| = 13$.

1/ L'équation doit admettre des racines, soit $\Delta_m \geq 0$.

$\Delta_m = b^2 - 4ac = (2m+3)^2 - 4(m^2+5) = 4m^2 + 12m + 9 - 4m^2 - 20$, soit $\Delta_m = 12m - 11$.

$\Delta_m \geq 0 \Leftrightarrow 12m - 11 \geq 0$, soit $m \geq \dfrac{11}{12}$, condition pour que (E_m) admette des racines.

2/ $|x' - x''|$ est une expression <u>symétrique par rapport aux deux racines</u>, soit $|x' - x''| = |x'' - x'|$.

Elle doit donc pouvoir s'exprimer en fonction de $S = x' + x'' = -\dfrac{b}{a}$ et $P = x'x'' = \dfrac{c}{a}$.

$|x' - x''|^2 = (x' - x'')^2 = x'^2 + x''^2 - 2x'x'' = (x'^2 + x''^2 + 2x'x'') - 4x'x'' = (x' + x'')^2 - 4x'x'' = S^2 - 4P$.

$|x' - x''| = 13 \Leftrightarrow (x' - x'')^2 = 169$. (*il y a équivalence, puisque* $|x' - x''|$ *et* 13 *sont tous les deux positifs*).

$S_m = -\dfrac{b}{a} = 2m + 3$ et $P_m = \dfrac{c}{a} = m^2 + 5$.

$|x' - x''| = 13 \Leftrightarrow (x' - x'')^2 = 169 \Leftrightarrow S_m^2 - 4P_m = 169 \Leftrightarrow (2m+3)^2 - 4(m^2+5) = 169$.

$4m^2 + 12m + 9 - 4m^2 - 20 = 169 \Leftrightarrow 12m = 180$, soit $m = +15$.

Seule l'équation (E_{15}) admet deux racines x' et x'' vérifient $|x' - x''| = 13$.

<u>*Vérification*</u> : (E_{15}) : $x^2 - 33x + 230 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 33^2 - 4 \times 230 = 169 = 13^2$, d'où : $x' = \dfrac{33 - 13}{2} = +10$;$x'' = \dfrac{33 + 13}{2} = +23$.

On constate bien que $|x' - x''| = 13$.