

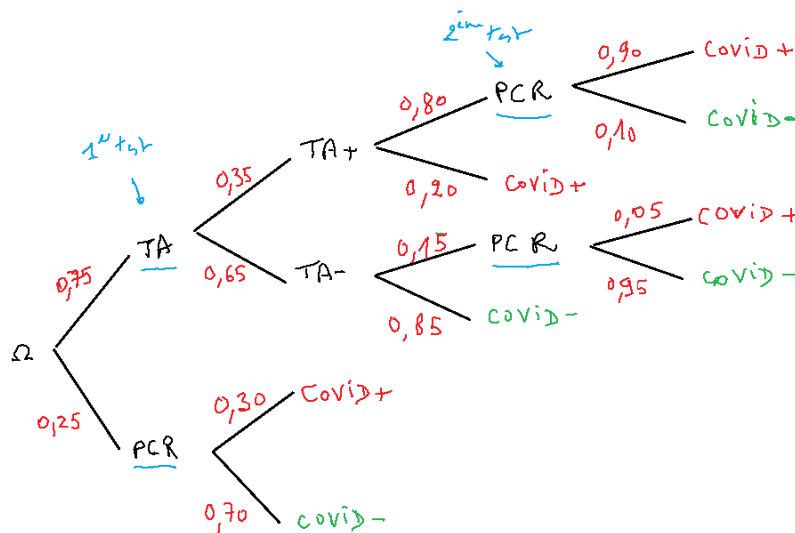
1^{ère} Partie : Probabilités

Voici les dernières données transmises par l’O.M.S. en ce qui concerne la France Métropolitaine :

Parmi la population désireuse de faire un test de dépistage du COVID au 15/01/2022 :

- 75% d’entre elle souhaite faire un test antigénique (TA), les autres directement un test P.C.R (PCR).
- Parmi ceux qui font un test antigénique, 35% s’avèrent positifs au COVID (COVID+), et 80 % de ceux déclarés positifs souhaitent une vérification par test P.C.R., test qui s’avère positif pour 90% d’entre eux. Les autres antigéniques positifs ne font pas de vérification et sont donc considérés comme COVID+.
- Parmi ceux dont le test antigénique est négatif, 15% souhaitent tout de même un test P.C.R. de vérification. Dans 95% des cas, le test P.C.R. confirme leur statut COVID- .
- Parmi ceux ayant directement opté pour un test P.C.R., le test les déclare COVID+ dans 30% des cas.

1/ Etablir un arbre de décision qui reflète tous les cas de figure, test antigénique seul (TA), test P.C.R. seul (PCR), test antigénique suivi d’un test P.C.R., puis tous les cas de positivité ou non (COVID+ ou COVID-).



2/ Pour un individu quelconque souhaitant faire un test de dépistage, quelle est la probabilité qu’il soit déclaré COVID+ ?

- a) TA, TA+, PCR, PCR+ : $p_1 = 0,75 \times 0,35 \times 0,80 \times 0,90 = 0,1890$,
- b) TA, TA+, pas de PCR : $p_2 = 0,75 \times 0,35 \times 0,20 = 0,0525$,
- c) TA, TA-, PCR, PCR+ : $p_3 = 0,75 \times 0,65 \times 0,15 \times 0,05 = 0,0037$
- d) PCR, PCR+ : $p_4 = 0,25 \times 0,30 = 0,0750$.

$p(\text{COVID+}) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0,3202$, soit 32,02% des personnes testées.

3/ Sachant qu’un individu est déclaré COVID- , quelle est la probabilité qu’il ait subi les deux tests.

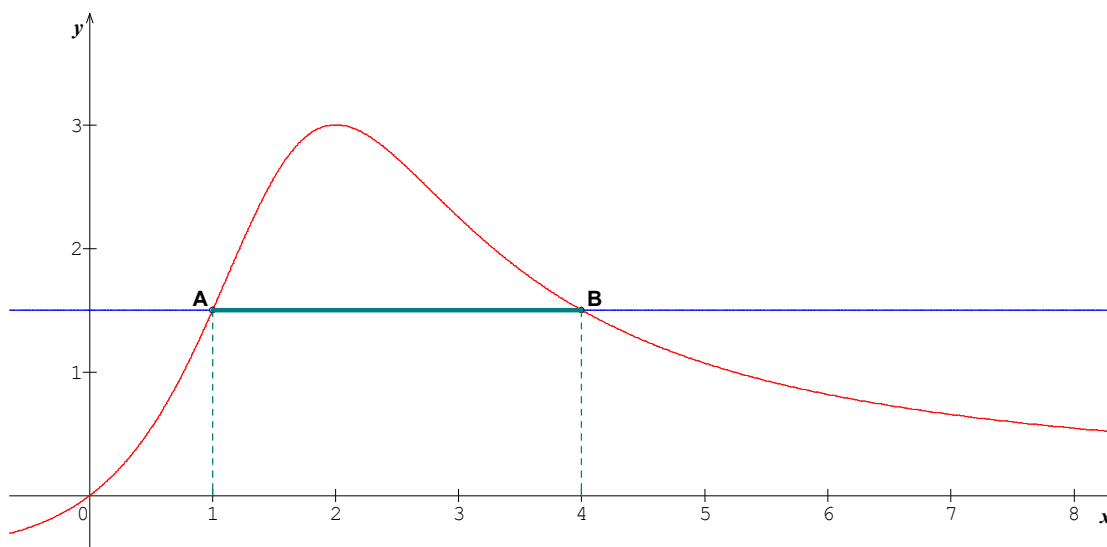
On fait le rapport des cas COVID- après deux tests effectués (Cas Favorables) au nombre total des cas COVID- (Cas Possibles), ou le rapport des probabilités de ces deux cas : Favorables : TA,TA+,PCR,PCR+ et TA, TA-, PCR-PCR- :

$$p' = \frac{0,75 \times 0,35 \times 0,80 \times 0,10 + 0,75 \times 0,65 \times 0,15 \times 0,95}{1 - p(\text{COVID+})} = \frac{0,0905}{1 - 0,3202} = 0,1331$$
 ,

13,31% des cas COVID- ont subi deux tests.

2^{ème} Partie : Etude de Fonction

Les prévisionnistes de l'O.M.S. sur l'évolution de la 5^{ème} vague COVID en France, estiment que, depuis son déclenchement, estimé au 15/11/2021, le nombre de cas positifs, a évolué et évoluera selon la courbe suivante :



Les unités, sans rapport avec celles portées sur les axes de coordonnées, sont :

Axe x ' x : 1 unité = 15 jours

Axe y ' y : 1 unité = 150.000 cas positifs.

Sachant que pour ces unités l'écriture fonctionnelle associée à la courbe est $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 3x + 4}$, pour $x \geq 0$:

1/ Etudier les variations de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variation, en précisant au bout de combien de jours le maximum a été ou devrait être atteint, le nombre de cas positifs à cette date, et l'estimation du nombre de cas le 15/01/22.

Le dénominateur $x^2 - 3x + 4$ admet $\Delta = -7$ pour discriminant, donc n'admet pas de racine.

$f(x)$ est partout définie (calculable) sur $[0 ; +\infty[$.

Remarque : $f(0) = 0$, début de la 5^{ème} vague à l'instant $x = 0$ (15/11/21).

Dérivée : $f = \frac{u}{v} \Rightarrow f' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$.

$$f'(x) = \frac{3(x^2 - 3x + 4) - (2x - 3)(3x)}{(x^2 - 3x + 4)^2} = \frac{-3x^2 + 12}{(x^2 - 3x + 4)^2} = \frac{-3(x^2 - 4)}{(x^2 - 3x + 4)^2} = \frac{-3(x+2)(x-2)}{(x^2 - 3x + 4)^2}.$$

Recherche des Extrema :

Les sommets vérifient $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) = 0$, mais $x \geq 0$ entraîne $x+2 > 0$, donc $x-2 = 0$, soit $x = +2$.

La courbe C_f admet un sommet unique sur $[0 ; +\infty[$, d'abscisse +2, d'ordonnée $y = f(+2) = \frac{6}{2} = +3$.

Le sommet de la courbe est situé en $E(+2 ; +3)$, soit après $2 \times 15 = 30$ jours, le 15/12/21 (mois de 30 jours).

Le nombre de cas positifs sera alors au maximum, avec $3 \times 150.000 = 450.000$ cas.

Signe la Dérivée :

$f'(x)$ est du signe de $\frac{-3(x+2)(x-2)}{(x^2-3x+4)^2}$, soit celui de $-(x-2) = -x+2$ sur $[0; +\infty[$.

x	0	+2	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	\nearrow	\searrow

Considérons toujours des mois de 30 jours.

Le nombre de cas le 15/01/22, soit après 60 jours, donc $x = +4$, sera $f(+4)$ fois 150.000 cas.

$$f(+4) = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1,5, \text{ d'où } 1,5 \times 150.000 = 225.000 \text{ cas.}$$

2/ On estime que les hôpitaux doivent mettre en place un plan d'urgence lorsque le nombre estimé de cas positif est supérieur à la moitié du maximum de cas prévus.

Déterminer la date de début et la date de fin du plan d'urgence.

La moitié du maximum est $\frac{450.000}{2} = 225.000 \text{ cas} = 1,5 \times 150.000$, soit lorsque $f(x) = 1,5 = \frac{3}{2}$.

(on vient de voir que $x = +4$ est une solution).

$$f(x) = +4 \Leftrightarrow \frac{3x}{x^2-3x+4} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3x^2 - 9x + 12 = 6x \Leftrightarrow 3x^2 - 15x + 12 = 0 \Leftrightarrow x_1 = +1 \text{ et } x_2 = +4.$$

$x = +1$ correspond à la date du 01/12/21,

$x = +4$ correspond à la date du 15/01/22.

Le plan d'urgence des hôpitaux doit être activé du 01/12/21 au 15/01/22.