On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x + 3$ et $g(x) = -x^2 + 3x - 1$.

On note C_f et C_g leurs courbes représentatives respectives dans un même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.

1/ Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$.

$f(x) = x^3 - x + 3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 1$.

$g(x) = -x^2 + 3x - 1 \Rightarrow g'(x) = -2x + 3$.

2/ Déterminer l'équation réduite de la tangente (d) à C_f au point d'abscisse 0.

T_a : $y = f'(a)(x - a) + f(a) \Rightarrow T_0 : y = f'(0).x + f(0)$ avec $f'(0) = -1$ et $f(0) = +3$.

D'où : $T_0 : y = -x + 3$.

<u>Rappel</u> : *Une équation réduite est une présentation sous forme* $y = ax + b$.

Une équation générale est une présentation sous forme $Ax + By + C$.

$y = -x + 3 \Leftrightarrow x + y - 3 = 0$.

L'intérêt de la forme générale est qu'elle décrit plus de cas que la forme réduite :

Forme réduite : Droites obliques, comme $y = -x + 3$, et horizontales, comme $y = +2$.

La forme réduite ne permet pas d'écrire l'équation d'une verticale, comme $x = +2$.

Forme générale : Permet l'écriture de l'écriture de tout type de droite (oblique, horizontale, verticale)

$3x + 2y + 5 = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$ (oblique),

$0x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = +\frac{1}{2}$ (horizontale),

$2x + 0y + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ (verticale).

Conclusion : *Sauf cas de droite verticale, on écrit les droites sous forme réduite.*

3/ Démontrer que (d) est aussi la tangente à C_g en un point A dont on déterminera les coordonnées (on pourra, si nécessaire, émettre une conjecture à l'aide de la calculatrice graphique puis la démontrer).

1ère méthode :

<u>1ère *Réflexion*</u> : La tangente au point A à C_g doit avoir même pente (coefficient directeur) que celle en O à C_f ,

D'où $g'(x_A) = -1 \Leftrightarrow -2x_A + 3 = -1$, dont on déduit $x_A = +2$, $y_A = g(2) = +1$.

<u>2ème *Réflexion*</u> : Faut-il encore que la tangente soit commune à C_f en O ($y = -x + 3$) et à Cg en A , ce qui impose $y_A = -x_A + 3$, ce qui est vérifié par A(2 ; 1) (1 = -2 + 3) .

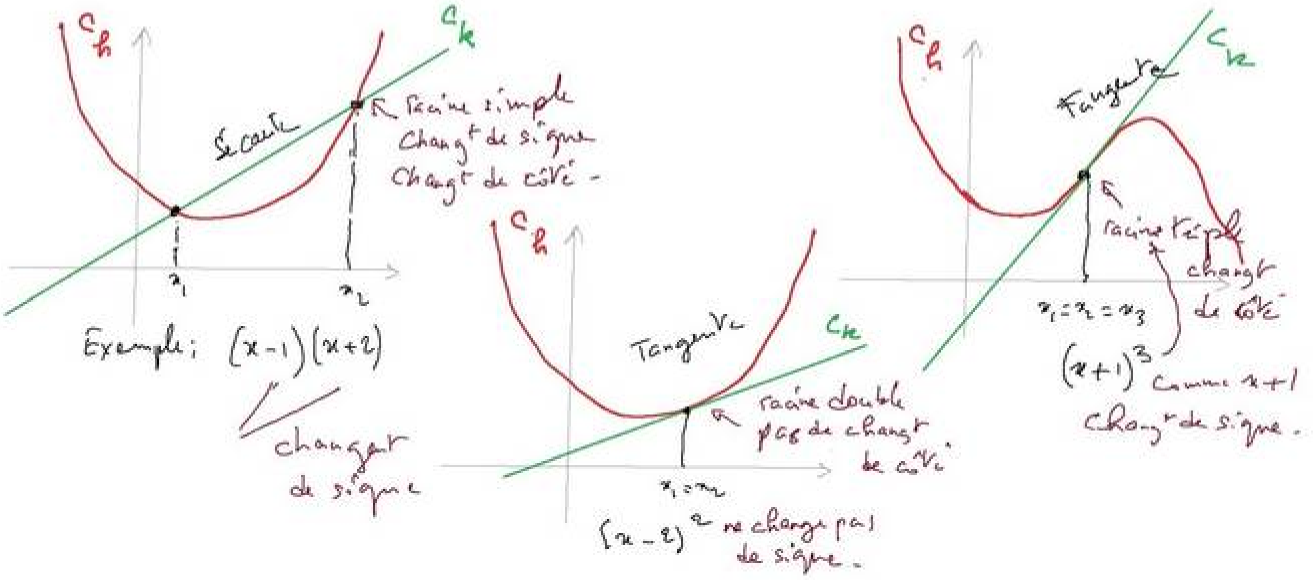
Conclusion : La droite d : $y = -x + 3$ est tangente à C_f en O(0 , 0) et à C_g en A(2 ; 1) . *Voir courbe plus bas.*

2ème méthode :

Réflexion :

Deux courbes C_h et C_k sont <u>sécantes</u> en x_1 et x_2 si ces deux abscisses sont distinctes, telles que $\begin{cases} h(x_1) = k(x_1) \\ h(x_2) = k(x_2) \end{cases}$.

Lorsque ces abscisses se rapprochent l'une de l'autre jusqu'à se confondre, les deux courbes deviennent <u>tangentes</u> entre elles, donc la notion de racine double, $x_1 = x_2$, est synonyme de celle de point de <u>tangence</u>.



<u>Retour à l'exercice</u> :

On étudie les intersections entre C_g , d'équation $g(x) = -x^2 + 3x - 1$ et la tangente (d=, d'équation $d(x) = -x + 3$.

$g(x) = d(x) \Leftrightarrow -x^2 + 3x - 1 = -x + 3 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0$.

Les abscisses des intersections entre C_g et (d) sont les solutions de $(x-2)^2 = 0$.

On retrouve une <u>racine double</u> $x_1 = x_2 = +2$ *, donc* (d) *est <u>tangente</u> en* $x_A = +2$ *à* C_g .

La droite d : $y = -x + 3$ est tangente à C_f en O(0 , 0) et à C_g en A(2 ; 1) .