Etudes et Réflexions.

Soit la fonction f définie pour tout x réel par $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$.

1/ Préciser son domaine de définition, sa parité, ses limites aux bornes de ce domaine.

f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, comme composée de fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$.

<u>Parité</u> : $f(-x) = f(x)$, pour tout x réel, puisque $(-x)^2 = x^2$.

La fonction f est paire, donc la courbe C est symétrique par rapport à l'axe $y'y$ des ordonnées.

- Si $x \to +\infty$: $-x^2 \to -\infty$ d'où $e^{-x^2} \to 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. Asymptote horizontale $y = 1$.

La parité de f confirme ce résultat pour $x \to -\infty$.

2/ Etudier la dérivabilité de f en $x = 0$. Donner les équations des tangentes en ce point.

f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$, comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R} - \{0\}$.

La dérivabilité de f en $x = 0$ est peu probable, sachant $f(0) = \sqrt{1 - e^0} = 0$ et la fonction $\sqrt{u}$ non dérivable si $u = 0$.

En effet : $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, donc le dénominateur s'annule lorsque $u = 0$, d'où une non dérivabilité probable.

Soyons plus rigoureux en calculant $f_d'(0) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$ *pente de la tangente en* $O(0\,;0)$ *à droite de* 0 .

$$f_d'(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{1 - e^{-h^2}}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \sqrt{\frac{1 - e^{-h^2}}{h^2}} = \lim_{h \to 0^+} \sqrt{\frac{e^{-h^2} - 1}{-h^2}} .$$

Posons $X = -h^2 \to 0$: On sait que $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{e^X - 1}{X} = exp'(0) = e^0 = 1$, d'où $f_d'(0) = \lim\limits_{h \to 0^+} \sqrt{\dfrac{e^{-h^2} - 1}{-h^2}} = +1$.

Malgré nos craintes, la dérivée à droite en $x = 0$ *est calculable, la tangente étant d'équation* $y = x$.

Par raison de symétrie de la courbe par rapport à l'axe $y'y$, on déduit que $f'_g(0) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(h)}{h} = -1$.

La dérivée à gauche en $x = 0$ *est calculable, la tangente étant d'équation* $y = -x$.

On est en présence d'un <u>*point anguleux*</u> en 0 , les pentes à gauche et à droite étant différentes.

Nous allons cependant fait un calcul rigoureux de cette limite, afin de constater l'importance du changement de signe de h *lorsque cette expression entre dans la racine.*

On sait en effet que $\sqrt{a^2} = |a|$, donc ce qui sort d'une racine doit être positif : $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = |-3|$.

A l'inverse, ce qui entre dans une racine doit être positif.

$f_d'(0) = \mathbf{\lim\limits_{h \to 0^-}} \dfrac{f(h)}{h} = \mathbf{\lim\limits_{h \to 0^-}} \dfrac{\sqrt{1 - e^{-h^2}}}{h}$ (h est négatif, il faut entrer $|h| = -h > 0$) .

$f_d'(0) = \mathbf{-} \mathbf{\lim\limits_{h \to 0^-}} \dfrac{\sqrt{1 - e^{-h^2}}}{-h} = \mathbf{-} \lim\limits_{h \to 0^-} \sqrt{\dfrac{1 - e^{-h^2}}{h^2}} = \mathbf{-1}$.

3/ Calculer la dérivée $f'(x)$ et établir le tableau de variation de la fonction f.

$(e^u)' = \boldsymbol{u'}.e^u$, d'où $(1 - e^{-x^2})' = -(\boldsymbol{-2x})e^{-x^2} = 2x.e^{-x^2}$.

$f = \sqrt{u} \Rightarrow f' = \dfrac{\boldsymbol{u'}}{2\sqrt{u}}$, d'où $f'(x) = \dfrac{2x.e^{-x^2}}{2\sqrt{1 - e^{-x^2}}} = \dfrac{x.e^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}} > 0$, pour tout x réel <u>strictement positif</u>.

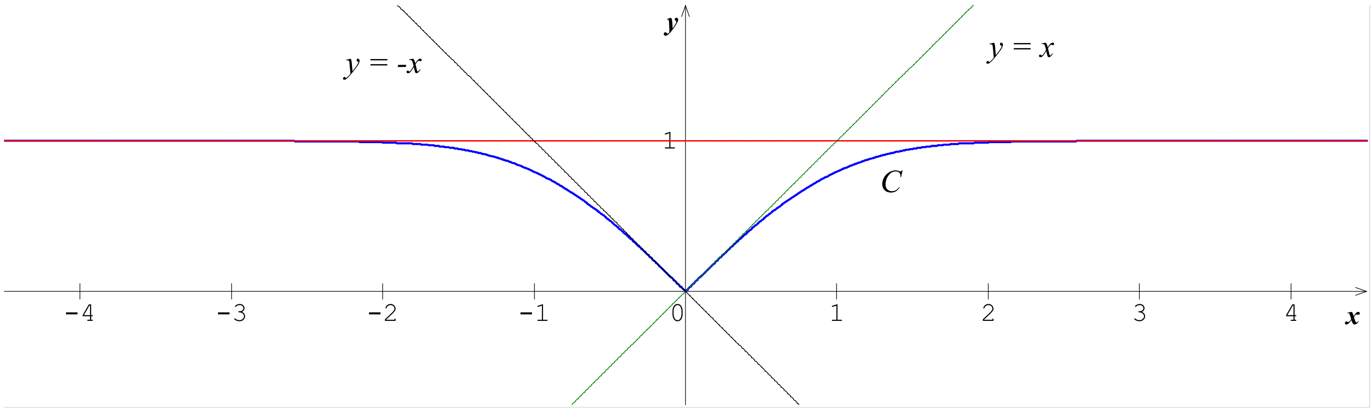
Par contre : $f'(0) = \dfrac{0}{0}$, forme indéterminée levée plus haut ($f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = +1$).

Tableau de variation sur $[0 ; +\infty[$ puis $]-\infty ; +\infty[$ par parité :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|+1$	$-$	
$f(x)$	0	↗	1

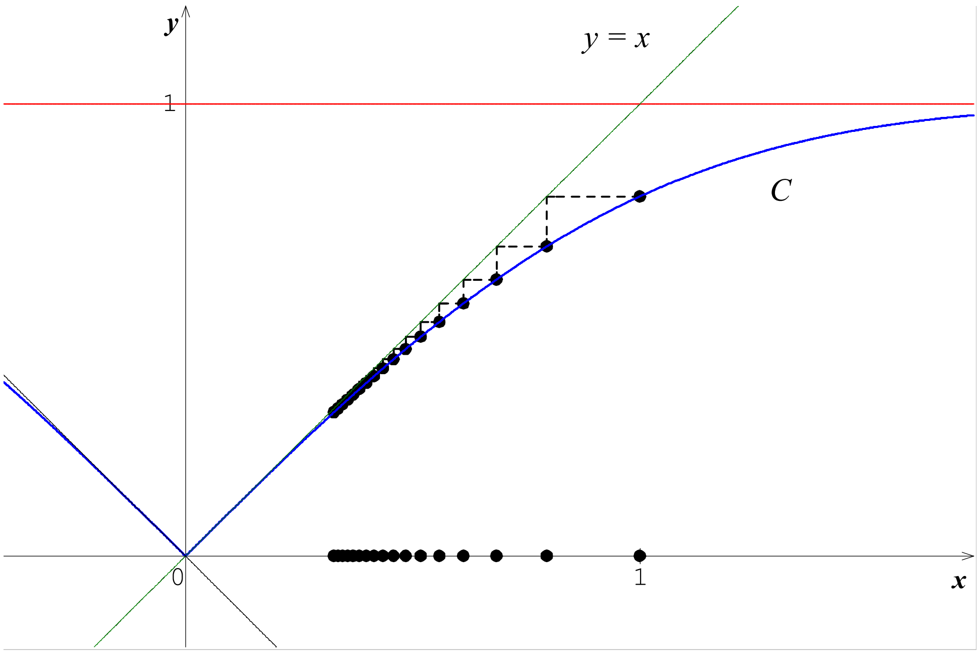
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-1\|\|+1$	$-$	
$f(x)$	1	↘	0	↗	1

4/ Tracer dans un repère orthonormé du plan la courbe représentative C de la fonction f, et les deux tangentes en $x = 0$.



5/ Soit la suite u telle que $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

A l'aide des positions relatives de C et de la tangente en $x = 0$ sur $[0 ; +\infty[$, conjecturer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.



La suite u est bornée par 0 et 1 $(0 < u_n \leq 1)$, strictement décroissante, donc convergente, probablement vers $L = 0$.

La démonstration de la conjecture est délicate, mais nous allons la tenter.

Remarque : Par construction, sachant $u_0 = 1 > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 - e^{-u_n^2}}$, on déduit $u_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

On aurait pu faire une récurrence.

a) Décroissance de la suite u :

Soit la proposition de récurrence P_n : « $u_n \leq u_{n-1}$ ».

Initialisation : P_1 est vraie $(u_1 < u_0)$, puisque $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{1 - e^{-u_0^2}} = \sqrt{1 - e^{-1}} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{e}} \approx 0{,}795$.

Hérédité : Supposons P_n vraie $(u_n \leq u_{n-1})$. Peut-on en déduire P_{n+1} vraie $(u_{n+1} \leq u_n)$?

$0 \leq u_n \leq u_{n-1} \Leftrightarrow u_n^2 \leq u_{n-1}^2$ (la mise au carré conserve les ordres des positifs) $\Leftrightarrow -u_n^2 \geq -u_{n-1}^2$.

On déduit $e^{-u_n^2} \geq e^{-u_{n-1}^2}$ (exponentielle continue et croissante, conserve les ordres), d'où $1 - e^{-u_n^2} \leq 1 - e^{-u_{n-1}^2}$.

D'où $\sqrt{1 - e^{-u_n^2}} \leq \sqrt{1 - e^{-u_{n-1}^2}}$ (la racine conserve les ordres), soit $u_{n+1} \leq u_n$, soit P_{n+1} vraie.

Conclusion : P_n vraie pour tout $n \geq 1$, soit $u_n \leq u_{n-1}$.

Sachant $u_n \geq 0$ et $u_n \leq u_0$, soit $u_n \leq 1$, on peut affirmer que la suite u est décroissante, bornée par 0 et 1.

Conséquence : La suite u est convergente vers L, avec $0 \leq L < 1$.

b) Détermination de la limite L :

On passe la relation de récurrence à sa limite pour n tendant vers $+\infty$.

$u_{n+1} = \sqrt{1 - e^{-u_n^2}} \Rightarrow L = \sqrt{1 - e^{-L^2}}$, d'où $L^2 = 1 - e^{-L^2} \Leftrightarrow e^{-L^2} = -L^2 + 1$.

$X = L^2$ est donc une solution positive ou nulle de l'équation $e^{-X} = -X + 1$.

Soit $E(X) = h(X) - g(X) = e^{-X} - (-X + 1) = e^{-X} + X - 1$ la fonction qui mesure l'écart algébrique vertical entre les courbes représentatives de $g(X) = -X + 1$ et $h(X) = e^{-X}$.

$g'(X) = -e^{-X} + 1 \geq 0$ sur $[0 ; +\infty[$ ($0 \leq X \Leftrightarrow -X \leq 0 \Leftrightarrow e^{-X} \leq 1$, soit $-e^{-X} + 1 \geq 0$.

La fonction g est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$, de valeur maximum $g(0) = 0$, donc seul $X = 0$ est une solution positive ou nulle de $g(X) = 0$, soit $e^{-X} + X - 1 = 0$ ou $e^{-X} = -X + 1$.

$L^2 = X = 0 \Rightarrow L = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.