1/ Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 5x + 6y + 7z = 8 \end{cases}$.

$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 5x + 6y + 7z = 8 \end{cases} \Rightarrow$ Par soustraction en colonne $4x + 4y + 4z = 4$, soit $x + y + z = 1$.

On déduit $x + y = 1 - z$.

$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 4 - 3z \\ x + y = 1 - z \end{cases}$, d'où, par soustraction en colonne : $y = 3 - 2z$, d'où $x = -2 + z$.

On déduit $(x\,;y\,;z) = (-2 + z\,;3 - 2z\,;z)$, $\forall z \in \mathbb{Z}$. On pourrait présenter $(x\,;y\,;z) = (-2 + t\,;3 - 2t\,;t)$, $\forall t \in \mathbb{Z}$.

On remarque qu'en effet, $t \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x\,;y\,;z) \in \mathbb{Z}^3$.

2/ Démontrer qu'il existe un et un seul triplet de $\mathbb{Z}^3$ solution du système précédent, tel que $x^3 + y^3 + z^3 = 1051$.

On peut savoir $(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = 3(x + y)(y + z)(z + x)$.

$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 1051 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow 3(x + y)(y + z)(z + x) = -1050$, soit $(x + y)(y + z)(z + x) = -350$.

Sachant $350 = 2\times5^2\times7$: $x + y + z = 1$ interdit l'éventualité de 3 nombres tous positifs ou tous négatifs.

$(x + y)(y + z)(z + x) = -1\times2\times175 \Rightarrow \begin{cases} x + y = -1 \\ y + z = 2 \\ z + x = 175 \end{cases}$. En additionnant en colonne, on obtient $x + y + z \neq 1$.

Les présentations $1\times(-2)\times175$ et $1\times2\times(-175)$ ne vérifient pas non plus $x + y + z \neq 1$.

Il en est de même pour $-1\times5\times70$, $-1\times7\times50$, $-1\times14\times25$, $-2\times5\times35$, $-2\times7\times25$.

Seul $-5\times7\times25$ présente une variante solution :

$$(x + y)(y + z)(z + x) = 5\times7\times(-10) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ y + z = 7 \\ z + x = -10 \end{cases} \Rightarrow 2(x + y + z) = 2\text{, soit } x + y + z = 1.$$

$(x\,;y\,;z) = (-6\,;11\,;-4)$ est solution du système $\begin{cases} x + 2y + 3z = -6 + 22 - 12 = 4 \\ 5x + 6y + 7z = -30 + 66 - 28 = 8 \\ x^3 + y^3 + z^3 = -216 + 1331 - 64 = 1051 \end{cases}$.

Il n'existe pas d'autre solution.

<u>Autre Méthode</u> :

On a vu que $(x\,;y\,;z) = (-2 + t\,;3 - 2t\,;t)$, $\forall t \in \mathbb{Z}$.

$x^3 + y^3 + z^3 = 1051 \Leftrightarrow (t - 2)^3 + (3 - 2t)^3 + t^3 = 1051$, avec $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Après développement, on obtient $-6t^3 + 30t^2 - 42t + 19 = 1051$, soit $6t^3 - 30t^2 + 42t + 1032 = 0$.

On ne peut que rechercher une *racine évidente*, la calculatrice donnant $t = -4$.

Le souci avec l'énoncé est qu'en 1983 les élèves ne disposaient pas de calculatrice permettant cette recherche, donc la recherche se limitait généralement à -2 ; -1 ; 1 ; 2 … loin de -4 .

$f(t) = 6t^3 - 30t^2 + 42t + 1032 = (t + 4)(at^2 + bt + c) = at^3 + (4a + b)t^2 + (4b + c)t + 4c$.

Par *identification*, on obtient : $\begin{cases} a = 6 \\ 4a + b = -30 \\ 4b + c = 42 \\ 4c = 1032 \end{cases}$, d'où $(a\,;b\,;c) = (6\,;-54\,;258)$.

$f(t) = (t + 4)(6t^2 - 54t + 258) = 6(t + 4)(t^2 - 9t + 43)$.

$f(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = -4 \\ t^2 - 9t + 43 = 0\text{, avec } \Delta < 0 \end{cases}$. La seule solution est $t = -4$.

On retrouve $(x\,;y\,;z) = (-6\,;11\,;-4)$.