Plusieurs réponses justes sont possibles parmi les propositions.

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:

a) Si, pour tout réel $x > 1$, on a $1 + \frac{1}{x} < f(x) < \frac{x^2 + x + 100}{x^2 + 1}$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ (VRAI).

$$1 + \frac{1}{x} < f(x) < \frac{x^2 + x + 100}{x^2 + 1} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) < \lim_{x \to +\infty} f(x) < \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x + 100}{x^2 + 1},$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x + 100}{x^2 + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{100}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 .$$

On déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

b) Si $f(x) = 2x + 3 - \sin(2x)$, alors, pour tout x réel, on a : $f(x) \leq 2x + 2$ (FAUX).

$-1 \leq \sin(2x) \leq +1 \Rightarrow 2x + 3 - 1 \leq 2x + 3 - \sin(2x) \leq 2x + 3 + 1$.

On déduit : $2x + 2 \leq f(x) \leq 2x + 4$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathbf{2x.\sin\left(\frac{1}{2x}\right) = 1}$ **(VRAI)**.

Soit $X = \frac{1}{2x}$, avec $\lim\limits_{x \to +\infty} X = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2x} = 0$.

$2x = \frac{1}{X}$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x.\sin\left(\frac{1}{2x}\right) = \lim\limits_{X \to 0} \frac{1}{X}\sin X = \lim\limits_{X \to 0} \frac{\sin X}{X} = 1$.

En effet : $\lim\limits_{X \to 0} \frac{\sin X}{X} = \lim\limits_{X \to 0} \frac{\sin X - \sin 0}{X - 0} = \sin'(0) = \cos 0 = 1$.

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3 + 2^n}{3 + 4^n} = 1$ (FAUX).

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3 + 2^n}{3 + 4^n} \text{ est indéterminé } \frac{\infty}{\infty} : \lim_{n \to +\infty} \frac{3 + 2^n}{3 + 4^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{4^n(\frac{3}{4^n} + (\frac{1}{2})^n)}{4^n(\frac{3}{4^n} + 1)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{3}{4^n} + (\frac{1}{2})^n}{\frac{3}{4^n} + 1} .$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{4^n} = 0$ et $0 < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$. On déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3 + 2^n}{3 + 4^n} = \frac{0}{1} = 0$.

e) Si $0 < x < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} [(1 - x)^n (1 + x)^n] = +\infty$.

$0 < x < 1 \Rightarrow 0 < 1 - x < 1$, d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - x)^n = 0$.

$0 < x < 1 \Rightarrow 1 < 1 + x < 2$, d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + x)^n = +\infty$.

La limite proposée est indéterminée $0 \times \infty$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} [(1 - x)^n (1 + x)^n] = \lim\limits_{n \to +\infty} [(1 - x^2)^n] = 0$,

En effet $0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow 0 < 1 - x^2 < 1$, d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - x^2)^n = 0$.