On donne deux nombres positifs a et b, tels que $0 < a < b$, et deux nombres positifs λ et μ.

Soit les suites u et v telles que $u_1 = a$, $v_1 = b$ et $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + \lambda v_n}{1+\lambda} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + \mu v_n}{1+\mu} \end{cases}$, pour tout n entier naturel non nul.

1-a) Comment choisir λ et μ pour que $u_1 < u_2 < v_2 < v_1$?

Généralisons la propriété : Comment choisir λ et μ pour que $u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$?

$u_n < u_{n+1} \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow \dfrac{u_n + \lambda v_n}{1+\lambda} - u_n > 0 \Leftrightarrow (u_n + \lambda v_n) - u_n(1+\lambda) > 0 \Leftrightarrow \lambda(v_n - u_n) > 0 \Leftrightarrow u_n < v_n$.

$v_{n+1} < v_n \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n < 0 \Leftrightarrow \dfrac{u_n + \mu v_n}{1+\mu} - v_n < 0 \Leftrightarrow (u_n + \mu v_n) - v_n(1+\mu) < 0 \Leftrightarrow u_n - v_n < 0 \Leftrightarrow u_n < v_n$.

Conclusion : Si $u_n < v_n$, on déduira que la suite u est croissante, tandis que la suite v sera décroissante.

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + \mu v_n}{1+\mu} - \frac{u_n + \lambda v_n}{1+\lambda} = \frac{(u_n + \mu v_n)(1+\lambda) - (u_n + \lambda v_n)(1+\mu)}{(1+\lambda)(1+\mu)} = \frac{(\lambda - \mu)u_n - (\lambda - \mu)v_n}{(1+\lambda)(1+\mu)},$$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{\mu - \lambda}{(1+\lambda)(1+\mu)}\,(v_n - u_n).$$

Si $\mu - \lambda > 0$, soit $\lambda < \mu$, alors $v_{n+1} - u_{n+1}$ et $v_n - u_n$ seront du même signe, celui de $v_1 - u_1 = b - a > 0$.

En conclusion : $\lambda < \mu \Rightarrow u_n < v_n$ pour tout entier naturel n non nul.

$\lambda < \mu \Rightarrow u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$.

Sous cette condition, la suite u est strictement croissante, la suite v strictement décroissante, et chaque u_n minore tous les v_n, de même que tout v_n majore tous les u_n.

Toute suite croissante majorée, ou décroissante minorée est convergente, donc les suites u et v sont convergentes.

On supposera $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = L'$.

b) λ et μ étant ainsi choisis, montrer que les suites u et v ont une limite commune que l'on déterminera.

On sait : $\mu > \lambda$ et $u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$.

$v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{\mu - \lambda}{(1+\lambda)(1+\mu)}\,(v_n - u_n)$ soit $v_{n+1} - u_{n+1} = q.(v_n - u_n)$, avec $q = \dfrac{\mu - \lambda}{(1+\lambda)(1+\mu)}$.

La suite w telle que $w_n = v_n - u_n$ vérifie $w_{n+1} = q.w_n$, donc est géométrique, de raison q, et de premier terme $w_1 = v_1 - u_1 = b - a$.

On déduit $w_n = q^{n-1}.w_1$, soit $v_n - u_n = q^{n-1}(b-a)$.

$q = \dfrac{\mu - \lambda}{(1+\lambda)(1+\mu)}$ vérifie $0 < q < \dfrac{\mu - \lambda}{1+\mu}$ et $0 < q < \dfrac{\mu}{1+\mu}$, soit $0 < q < 1$, puisque $0 < \mu < 1 + \mu$.

La suite w converge donc vers 0, puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} q^{n-1} = 0$.

On déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

$L = L'$, les deux suites ont une limite commune comprise entre chaque couple $(u_n\,;\,v_n)$.

Il reste à déterminer cette limite L :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + \lambda v_n}{1+\lambda} - u_n = \frac{(u_n + \lambda v_n) - u_n(1+\lambda)}{1+\lambda} = \frac{\lambda(v_n - u_n)}{1+\lambda} = \frac{\lambda}{1+\lambda}(v_n - u_n) .$$

On a vu : $v_n - u_n = q^{n-1}(b-a) = \left(\frac{\mu - \lambda}{(1+\lambda)(1+\mu)}\right)^{n-1}(b-a)$, d'où : $u_{n+1} - u_n = \frac{\lambda}{1+\lambda} \times (b-a).q^{n-1}$.

Posons $t_n = u_n - u_{n-1}$. La suite t est géométrique, de raison q , et de premier terme $t_2 = \frac{\lambda}{1+\lambda} \times (b-a) \times q^0$.

On déduit $S_n = t_2 + t_3 + \ldots + t_n = t_2 \frac{1-q^{n-1}}{1-q} \Leftrightarrow u_n - u_1 = t_2 \frac{1-q^{n-1}}{1-q}$ d'où $u_n = u_1 + t_2 \frac{1-q^{n-1}}{1-q}$.

$u_n = a + \frac{\lambda}{1+\lambda} \times (b-a) \times \frac{1-q^{n-1}}{1-q}$, avec $q = \frac{\mu - \lambda}{(1+\lambda)(1+\mu)}$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} q^{n-1} = 0$, on déduit $L = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{\lambda}{1+\lambda} \times (b-a) \times \frac{1}{1-q} = \frac{\lambda}{1+\lambda} \times (b-a) \times \frac{1}{1 - \frac{\mu - \lambda}{(1+\lambda)(1+\mu)}}$.

$$L = \frac{\lambda}{1+\lambda} \times (b-a) \times \frac{(1+\lambda)(1+\mu)}{(1+\lambda)(1+\mu) - (\mu - \lambda)} = \frac{\lambda(1+\lambda)(1+\mu)}{(1+\lambda)(1+2\lambda+\lambda\mu)}(b-a) .$$

Vérification numérique : Soit $a = 0$, $b = 1$, $\lambda = 1$, $\mu = 2$.

Le résultat attendu est $L = L' = \frac{6}{10} = 0{,}6$, ce que confirme le tableau suivant obtenu sur tableur :

$$\boldsymbol{u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}}$$

n	u(n)	v(n)
1	0	1
2	0,5	0,66666667
3	0,58333333	0,61111111
4	0,59722222	0,60185185
5	0,59953704	0,60030864
6	0,59992284	0,60005144
7	0,59998714	0,60000857
8	0,59999786	0,60000143
9	0,59999964	0,60000024
10	0,59999994	0,60000004
11	0,59999999	0,60000001
12	0,6	0,6
13	0,6	0,6