1/ On donne deux entiers naturels a et b, premiers entre eux.

Trouver un entier naturel c, tel que chacun des entiers a, b et c, divise le produit des deux autres ?

a divise bc, mais a est premier avec b, donc a divise c.

b divise ac, mais b est premier avec a, donc b divise c.

a et b divisent c, mais a et b sont premiers entre eux, donc ab divise c.

Preuve :

a divise $c \Leftrightarrow c = k.a$.

b divise $c \Leftrightarrow c = k'b$, d'où : $ka = k'b$.

Comme a est premier avec b, a divise $k'b \Rightarrow a$ divise k', soit $k' = k''a$.

On conclue : $c = ka = k'b \Leftrightarrow c = ka = (k''a)b$, soit $c = k''(ab)$.

Donc ab divise c.

L'énoncé affirme également : c divise ab, alors que ab divise c, donc on déduit $c = ab$.

$c = ab$ implique bien que a divise bc, b divise bc et c divise ab.

2/ On donne deux entiers naturels a et b, et d leur PGCD.

Trouver un entier naturel c, tel que chacun des entiers a, b et c, divise le produit des deux autres ?

$a = da'$ et $b = db'$, avec a' et b' premiers entre eux.

D'après 1/ : Si chacun des nombres a', b' et c' divise le produit des deux autres, on déduit $c' = a'b'$.

On a vu qu'alors a' divise $b'c'$, soit $da' = a$ divise $(db')c' = bc'$.

De même : b' divise $a'c'$, soit $db' = b$ divise $(da')c' = ac'$.

Enfin, $c' = a'b' \Rightarrow c'$ divise $ab = d^2(a'b')$.

Conclusion : $d = \text{Pgcd}(a\,;b) \Rightarrow c' = a'b' = \dfrac{1}{d^2}\,\text{PGCD}(a\,;b)$ vérifie que a, b et c' divisent le produit des deux autres.

***Application numérique* : $a = 15$, $b = 12$.**

PGCD (12 ; 15) = 3 $\Rightarrow c' = a'b' = 4 \times 5 = 20$.

12, 15 et 20 divisent le produit des deux autres entiers :

12 divise $15 \times 20 = 300$,

15 divise $12 \times 20 = 240$,

20 divise $12 \times 15 = 180$.