Soit $f(x) = 6(x - a)(x - b) + 3a(x - b) + 2b(x - a)$, avec a et b deux nombres positifs inégaux.

Démontrer, sans développer, que l'équation $f(x) = 0$ admet deux racines positives.

$f(x)$ est un trinôme du second degré, donc de forme $Ax^2 + Bx + C$, tel que $A = 6ab > 0$.

f est donc décroissante jusqu'à son minimum, puis croissante.

Remarque (pour vérification) :

$$f'(x) = 6(x - a) + 6(x - b) + 3a + 2b \Rightarrow f'(x) = 12x - (3a + 4b).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3a + 4b}{12} > 0.$$

x	$-\infty$	$\frac{3a + 4b}{12}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$
		m	$+\infty$

f , polynôme, est continu sur $\mathbb{R}$, donc ne change de signe qu'au passage de ses racines, solutions de $f(x) = 0$.

$$f(a) = 3a(a - b)$$

$$f(b) = 2b(b - a).$$

Sachant que a et b sont strictement positifs, on déduit que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.

On déduit, en accord avec le théorème de la valeur intermédiaire, qu'il existe une racine entre a et b , donc positive, et qu'il ne peut y avoir de racine double..

$$f(0) = 6(-a)(-b) + 3a(-b) + 2b(-a) = ab > 0.$$

On déduit que 0 est extérieur aux racines, ce qui prouve que 0 est inférieur aux deux racines, puisque a et b positifs interdisent que 0 soit supérieur aux deux racines.

On conclue : $0 < x_1 < a < x_2 < b$ ou $0 < x_1 < b < x_2 < a$.