Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle fermé $[a\,;b]$.

Soient $(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$ n valeurs de cet intervalle.

Prouver qu'il existe un élément c de $[a\,;b]$ tel que $f(c) = \dfrac{1}{n}\,[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]$.

Soit m le minimum de f sur $[a\,;b]$, atteint en $x = \alpha$.

Soit M le maximum de f sur $[a\,;b]$, atteint en $x = \beta$.

On déduit, pour tout $x \in [a\,;b]$: $m \le f(x) \le M$, d'où, $\forall x_i \in (x_1 , x_2 , \dots , x_n)$; $m \le f(x_i) \le M$.

En conséquence : $n \times m \le f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \le n \times M \;\Rightarrow\; m \le \dfrac{1}{n}\,[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)] \le M$,

ou encore : $f(\alpha) \le \dfrac{1}{n}\,[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)] \le f(\beta)$.

La fonction f étant <u>continue</u> sur $[a\,;b]$, de minimum m , et de maximum M :
Pour tout $y \in [m\,;M]$, il existe au moins un $c \in [a\,;b]$, tel que $y = f(c)$.

On déduit l'existence d'au moins un $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) = \dfrac{1}{n}\,[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]$.