Le but de l'exercice est de vérifier l'efficacité d'un vaccin sur une population donnée.

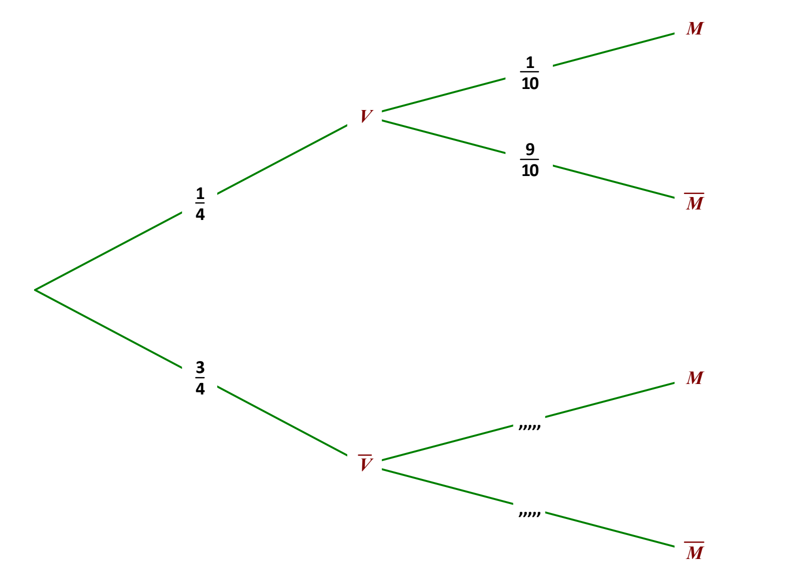
On dispose des données suivantes :

- **Un quart de la population a été vacciné contre la maladie.**
- **Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a un vacciné sur treize parmi les malades.**
- **La probabilité qu'un individu soit malade sachant qu'il a été vacciné est égale à 0,1.**

Pour une personne rencontrée au hasard, on note :

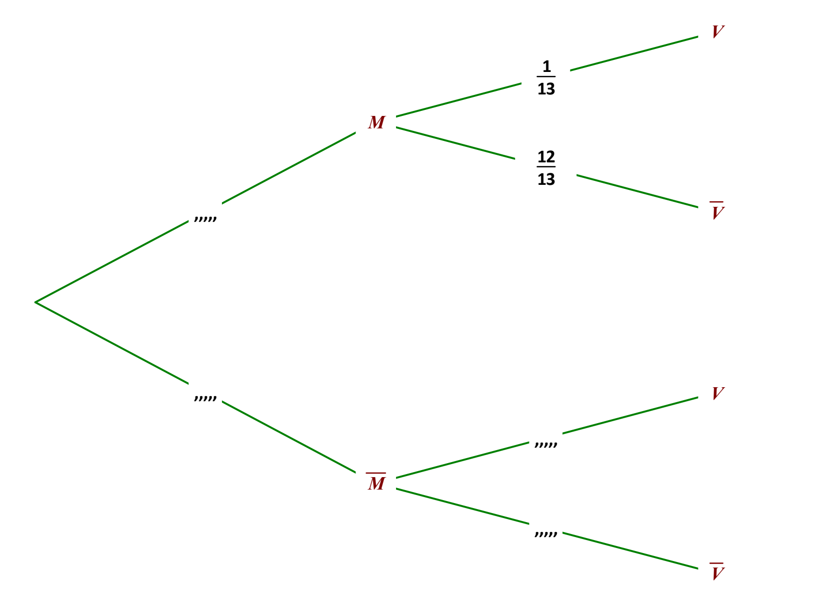
- **M l'évènement « être malade », $\overline{M}$ son contraire ;**
- **V l'évènement « être vacciné », $\overline{V}$ son contraire.**

1/ On rencontre au hasard une personne dans la population. Dessiner un arbre traduisant l'énoncé.



Les informations utilisées sont $P(V) = \frac{1}{4}$, $P(\overline{V}) = 1 - P(V) = \frac{3}{4}$, $P_V(M) = 0,1 = \frac{1}{10}$, $P_V(\overline{M}) = 1 - P_V(M) = \frac{9}{10}$.

Elle imposerait que l'arbre soit établi dans le sens inverse, et traduit $P_M(V) = \frac{1}{13}$.



On constatera plus bas, que dans ce cas, un raisonnement sur un <u>tableau à double entrée</u>, peut être plus parlant.

2/ Calculer la probabilité de l'évènement « M et V », notée $P(\mathrm{M} \cap \mathrm{V})$.

$P(\mathrm{M} \cap \mathrm{V})$ peut être écrit de deux façons, ce qui va permettre l'utilisation de $P_{\mathrm{M}}(\mathrm{V}) = \frac{1}{13}$.

$P(\mathrm{M} \cap \mathrm{V}) = P(\mathrm{M}) \times P_{\mathrm{M}}(\mathrm{V}) = P(\mathrm{M}) \times \frac{1}{13}$ (traduction du 2ème arbre)

$\boldsymbol{P(\mathrm{M} \cap \mathrm{V})} = P(\mathrm{V} \cap \mathrm{M}) \boldsymbol{= P(\mathrm{V}) \times P_{\mathrm{V}}(\mathrm{M}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{40}} = 0{,}025$, soit 2,5% (traduction du 1er arbre)

En déduire que $P(\mathrm{M}) = \frac{13}{40}$.

On déduit : $P(\mathrm{M} \cap \mathrm{V}) = P(\mathrm{V} \cap \mathrm{M}) \Rightarrow P(\mathrm{M}) \times \frac{1}{13} = \frac{1}{40}$, soit $P(\mathrm{M}) = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{1}{13}} = \frac{13}{40} = 0{,}325$, soit 32,5%.

3-a) Calculer $P(\mathrm{M} \cap \overline{\mathrm{V}})$.

Par la loi des probabilités totales on décompose l'évènement M en 2 évènements incompatibles $\mathrm{M} \cap \mathrm{V}$ et $\mathrm{M} \cap \overline{\mathrm{V}}$.

$P(\mathrm{M}) = P(\mathrm{M} \cap \mathrm{V}) + P(\mathrm{M} \cap \overline{\mathrm{V}})$, d'où : $P(\mathrm{M} \cap \overline{\mathrm{V}}) = P(\mathrm{M}) - P(\mathrm{M} \cap \mathrm{V}) = \frac{13}{40} - \frac{1}{40} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} = 0{,}3$, soit 30% .

La probabilité d'une personne, <u>dont on ne sait rien</u>, soit simultanément malade et non vaccinée est de 30%.

b) En déduire $P_{\overline{\mathrm{V}}}(\mathrm{M})$.

$P(\mathrm{M} \cap \overline{\mathrm{V}}) = \frac{3}{10}$, or $P(\mathrm{M} \cap \overline{\mathrm{V}}) = P(\overline{\mathrm{V}} \cap \mathrm{M}) = P(\overline{\mathrm{V}}) \times P_{\overline{\mathrm{V}}}(\mathrm{M}) = \frac{3}{4} \times P_{\overline{\mathrm{V}}}(\mathrm{M})$.

On déduit : $\frac{3}{4} \times P_{\overline{\mathrm{V}}}(\mathrm{M}) = \frac{3}{10} \Leftrightarrow P_{\overline{\mathrm{V}}}(\mathrm{M}) = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0{,}4$, soit 40% .

La probabilité d'une personne, <u>dont on sait qu'elle n'est pas vaccinée</u>, d'être malade est de 40%, alors qu'elle n'est que de 10% <u>parmi les personnes vaccinées</u>, et 32,5% <u>dans la population totale</u> (objet de la question suivante).

4/ Déterminer le réel k tel que $P_{\mathrm{V}}(\mathrm{M}) = k \times P_{\overline{\mathrm{V}}}(\mathrm{M})$.

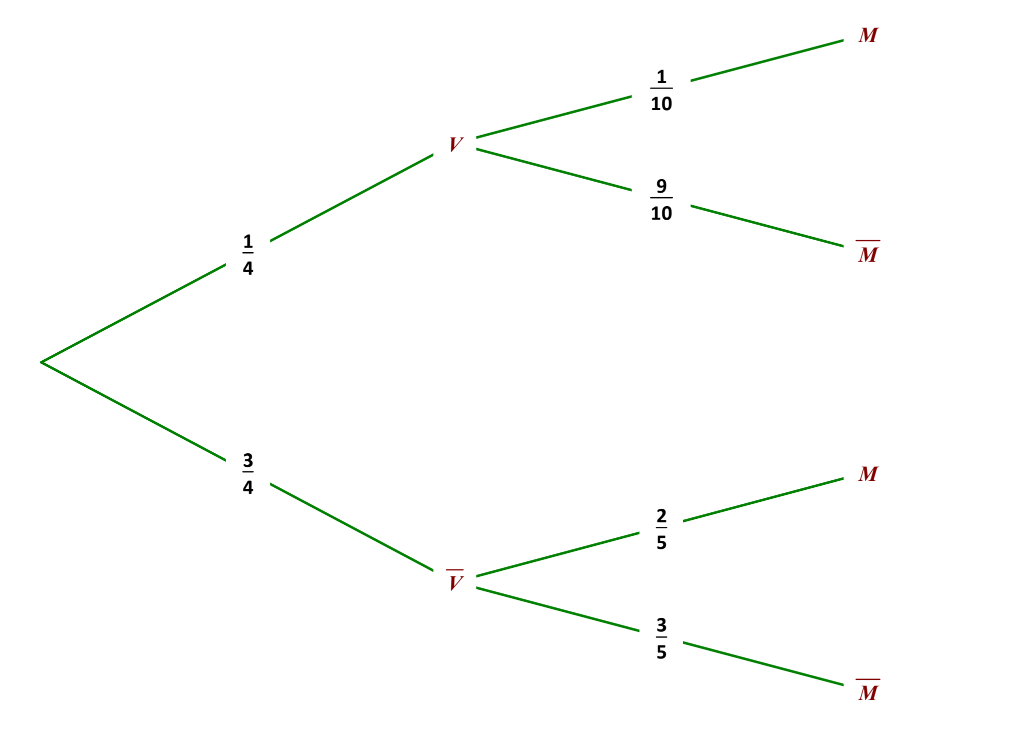
$P_{\mathrm{V}}(\mathrm{M}) = \frac{1}{10}$ et $P_{\overline{\mathrm{V}}}(\mathrm{M}) = \frac{4}{10}$, soit $P_{\mathrm{V}}(\mathrm{M}) = \frac{1}{4} \times P_{\overline{\mathrm{V}}}(\mathrm{M})$.

Enoncer ce dernier résultat en langage courant.

Il y a 4 fois moins de malades dans la population vaccinée que dans la population non vaccinée.

Nous allons maintenant présenter les deux arbres de décisions, complétés par les résultats obtenus, puis une présentation de l'ensemble par un tableau à double entrée.

1er tableau



2ème tableau

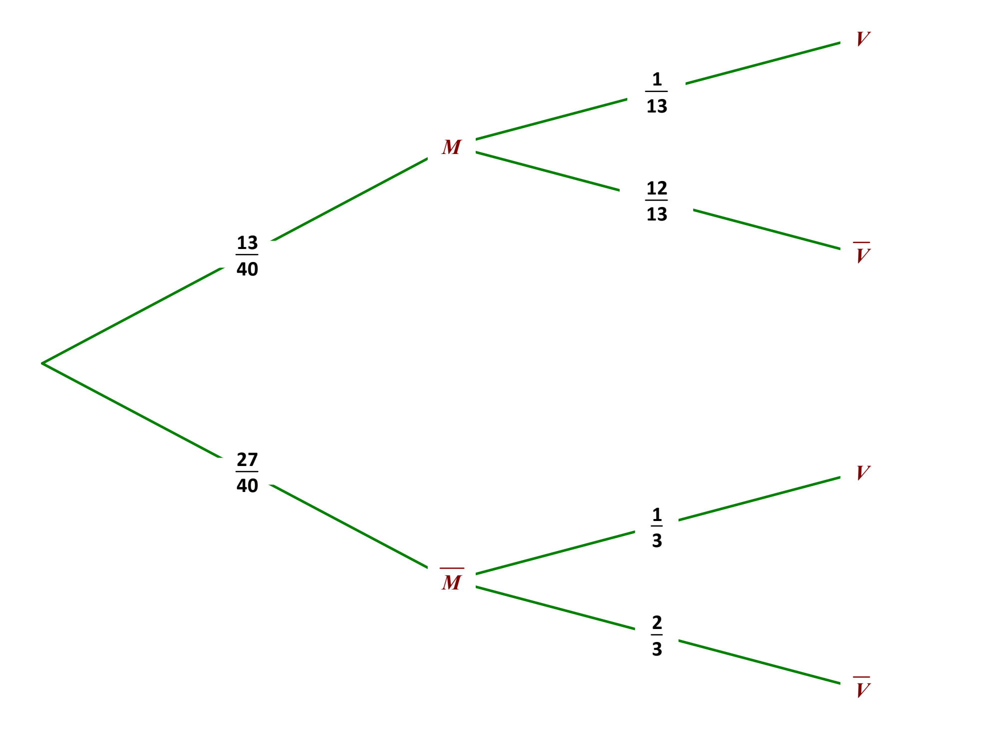


Tableau à double entrée :

Deux caractéristiques sont étudiées, le fait d'être Vacciné (V) et celui d'être Malade (M) .

On va donc envisager une population de $100 \times 100 = 10\,000$ individus.

L'intérêt est que, même si on calcule deux fois de suite un pourcentage, le résultat sera un nombre entier.

Exemple : Si on prend un échantillon de 100 individus.

$\frac{1}{4}$ de vaccinés = 25 personnes.

Parmi celles-ci, $\frac{1}{10}$ de malades = 2,5 malades (pas joli).

Si on prend un échantillon de $100 \times 100 = 10\,000$ individus (100 échantillons de 100 personnes)

$\frac{1}{4}$ de vaccinés = $100 \times 25 = 2\,500$ personnes.

Parmi celles-ci, $\frac{1}{10}$ de malades = 250 malades (plus joli).

1ère information : $\frac{1}{4}$ de personnes vaccinées, donc $\frac{3}{4}$ de non vaccinées.

	V	$\overline{V}$	Total
M	250		
$\overline{M}$	2250		
Total	2500	7500	10 000

On déduit 2500 vaccinés et 7500 non vaccinés.

2ème information : Parmi les personnes vaccinées, $\frac{1}{10}$ de malades.

On déduit 250 personnes vaccinées et malades et 2 250 personnes vaccinées non malades.

3ème information : Parmi les personnes malades, 1 vacciné pour 13 malades.

250 vaccinés et malades, d'où : $13 \times 250 = 3\,250$ malades et $10\,000 - 3\,250 = 6\,750$ non malades.

Il suffit ensuite de compléter : 3 000 non vaccinés et malades, et 4500 non vaccinés et non malades.

	V	$\overline{V}$	Total
M	250	3000	3250
$\overline{M}$	2250	4500	6750
Total	2500	7500	10 000