On considère la suite numérique v telle que, pour tout entier naturel n, on ait $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n} \end{cases}$ **.**

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour tout entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n. Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel, en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1	Algorithme N° 2	Algorithme N° 3
Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur $\frac{9}{6-v}$ Fin pour Afficher v **Fin algorithme**	**Variables :** v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur 1 Afficher v v prend la valeur $\frac{9}{6-v}$ Fin pour **Fin algorithme**	**Variables :** v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire Afficher v v prend la valeur $\frac{9}{6-v}$ Fin pour **Fin algorithme**

On peut de suite éliminer l'algorithme n° 2 .

En effet, dans la boucle « Pour i variant de 1 à n, faire …. Fin pour », v est réinitialisé à chaque itération de la boucle à la valeur 1 , aussitôt affiché, avant que d'être remplacé par $\dfrac{9}{6 - v}$, qui n'est jamais utilisé.

L'affichage est : 1, 1 , 1, …. 1 , n fois.

L'algorithme 1 ne convient pas non plus.

Il ne permet qu'un <u>unique affichage</u>, après que la boucle ait réalisé ses n itérations.

Si on détaille les itérations :

sachant $v_0 = 1$, valeur initiale de v , il <u>calcule</u> les n valeurs consécutives, v_1 , v_2 , …. , v_n , en affichant uniquement la dernière, v_n .

L'algorithme 3 ne convient pas non plus.

C'est l'algorithme le plus proche de ce qui est demandé.

L'affichage se fait bien dans la boucle, il commence par v_0 ($i = 1$), et se poursuit par v_1 ($i = 2$) …., jusqu'à v_{n-1} ($i = n$) . Donc, au détail près qu'il n'affiche pas v_n, mais v_{n-1} , c'est le meilleur des trois algorithmes.

Pour qu'il réponde parfaitement à la question, la boucle aurait dû être «Pour i variant de 1 à $n + 1$, faire … », ce qui est sans grande importance.

2. Pour n = 100 on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714

Pour n = 100, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

On peut conjecturer (ce qui n'est qu'un sentiment, qui n'aura de valeur que lorsqu'une démonstration des conjectures aura été faite) : La suite v semble **<u>croissante et majorée</u>** par une limite inférieure ou égale à 3 .

On ne peut pas de suite affirmer $L = 3$, car les termes suivants peuvent se limiter à [2,970 ; 2 ,975] .

3 – a) Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel : $0 < v_n < 3$.

Soit la proposition de récurrence $P(n)$: « $0 < v_n < 3$ » .

Initialisation :

$P(0)$ dit « $0 < v_0 < 3$ », ce qui est VRAI, puisque $v_0 = 1$.

Nous avons ainsi construit une base de départ solide (certitude) sur laquelle s'appuyer.

Hérédité (*Droit de Passage*) :

On suppose $P(n)$ vrai (ce n'est qu'une supposition) : $0 < v_n < 3$.

Peut-on en déduire que $P(n+1)$ sera vrai $(0 < v_{n+1} < 3)$, *sous réserves que $P(n)$ le soit.*

$0 < v_n < 3 \Rightarrow -3 < -v_n < 0 \Rightarrow 3 < 6 - v_n < 6 \Rightarrow \frac{9}{6} < \frac{9}{6 - v_n} < \frac{9}{3}$, soit $\frac{3}{2} < v_{n+1} < 3$.

On a bien prouvé que $0 < v_n < 3$, impliquera que $0 < v_{n+1} < 3$, donc que $P(n)$ VRAI $\Rightarrow$ $P(n+1)$ VRAI.

Conclusion :

En s'appuyant sur $P(0)$ VRAI, et $P(n+1)$ VRAI dès que $P(n)$ VRAI, on conclue que $P(n)$ VRAI, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Donc : $0 < v_n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (*La suite v est bornée, minorée par 0 , majorée par 3*) .

b) Démontrer que, pour tout n entier naturel : $v_{n+1} - v_n = \frac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$.

L'objectif de la question est de vérifier si $v_{n+1} > v_n$, suite croissante, ou $v_{n+1} < v_n$, suite décroissante, ou rien du tout.

Il est généralement plus facile de comparer $b - a$ à 0 , que directement b à a , car une comparaison à 0 se traduit par « être positif » ou « être négatif », compatible avec les opérations.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{9}{6 - v_n} - v_n = \frac{9 - v_n(6 - v_n)}{6 - v_n} = \frac{v_n^2 - 6v_n + 9}{6 - v_n} = \frac{(v_n - 3)^2}{6 - v_n} = \frac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$$, puisque $(b - a)^2 = (a - b)^2$.

c) La suite est-elle monotone ?

Nous savons $v_n < 3$, donc $v_n < 6$, soit $6 - v_n > 0$, dont on déduit : $v_{n+1} - v_n = \frac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n} \geq 0$.

$v_{n+1} - v_n \geq 0 \Leftrightarrow v_{n+1} \geq v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

La suite v est *croissante.*

d) La suite est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

Sachant de plus : $v_n \leq 3$, la suite v est strictement croissante, majorée par 3 , donc elle est convergente vers $L \leq 3$.

Soit $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = L$. Passons la relation de récurrence $v_{n+1} = \frac{9}{6 - v_n}$ à sa limite $(n \to +\infty)$.

Tous les termes de la suite s'accumulent sur la valeur L , jusqu'à se confondre avec elle :

$v_{n+1} = \frac{9}{6 - v_n} \Rightarrow L = \frac{9}{6 - L}$, d'où : $6L - L^2 = 9 \Leftrightarrow L^2 - 6L + 9 = 0 \Leftrightarrow (L - 3)^2 = 0$, soit $L = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 3$.

Attention : *Cette méthode donne la valeur possible de L , sous réserves que la suite converge, donc il est impératif d'avoir préalablement démontré que la suite est convergente, avant de pouvoir affirmer son résultat.*

4. On considère la suite w telle que, pour tout n entier naturel : $w_n = \frac{1}{v_n - 3}$.

a) Démontrer que w est une suite arithmétique, de raison $r = -\frac{1}{3}$.

Recherchons l'écriture récurrente de w_n , soit l'écriture de w_n en fonction de n .

$w_n = \dfrac{1}{v_n - 3} \Leftrightarrow v_n - 3 = \dfrac{1}{w_n} \Leftrightarrow v_n = 3 + \dfrac{1}{w_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

On reporte dans $v_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n}$: $3 + \dfrac{1}{w_{n+1}} = \dfrac{9}{6 - (3 + \dfrac{1}{w_n})} \Leftrightarrow 3 + \dfrac{1}{w_{n+1}} = \dfrac{9}{3 - \dfrac{1}{w_n}} \Leftrightarrow 3 + \dfrac{1}{w_{n+1}} = \dfrac{9w_n}{3w_n - 1}$.

D'où : $\dfrac{1}{w_{n+1}} = \dfrac{9w_n}{3w_n - 1} - 3 = \dfrac{9w_n - 3(3w_n - 1)}{3w_n - 1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{w_{n+1}} = \dfrac{3}{3w_n - 1} \Leftrightarrow w_{n+1} = \dfrac{3w_n - 1}{3}$.

On conclue : $w_{n+1} = w_n - \dfrac{1}{3}$, soit $w_{n+1} - w_n = -\dfrac{1}{3} = r$, raison d'une suite arithmétique.

b) En déduire l'expression de w_n et v_n en fonction de n .

L'écriture fonctionnelle de la suite arithmétique w , de raison r , et de 1[er] terme w_0 est : $w_n = w_0 + n.r$.

Comme $r = -\dfrac{1}{3}$ et $w_0 = \dfrac{1}{v_0 - 3} = -\dfrac{1}{2}$, on déduit $w_n = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Remarque : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = -\infty$.

$w_n = -\dfrac{3 + 2n}{6} \Rightarrow v_n = 3 + \dfrac{1}{w_n}$ (vu précédemment) , soit $v_n = 3 - \dfrac{6}{3 + 2n} = \dfrac{3(3 + 2n) - 6}{3 + 2n} = \dfrac{3 + 6n}{3 + 2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) Retrouver à partir de ces résultats la valeur de $L = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

Lorsque $n \to +\infty$, la forme fonctionnelle de v_n , soit $\dfrac{6n + 3}{2n + 3}$ est *indéterminée*, de forme $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$v_n = \dfrac{n(6 + \dfrac{3}{n})}{n(2 + \dfrac{3}{n})} = \dfrac{6 + \dfrac{3}{n}}{2 + \dfrac{3}{n}}$, avec $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{6 + \dfrac{3}{n}}{2 + \dfrac{3}{n}} = \dfrac{6}{2} = 3$, puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

On retrouve bien $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 3$, comme prévu.