Déterminer les entiers naturels n tels que $\frac{13n-21}{3n+4}$ soit un entier.

On cherche n tel que $13n-21$ soit un multiple entier de $3n+4$, donc que $3n+4$ divise exactement $13n-21$.
(*On note* $a \mid b$ *l'affirmation* : « a divise exactement b »*, soit* $b = k.a$ *, avec* $k \in \mathbb{N}$).

Le principe utilisé est, à partir de *combinaisons linéaires* entre $13n-21$ et $3n+4$, arriver à une conclusion de forme « $3n+4 \mid a$ », où a est un entier relatif.
On pourra alors conclure que $3n+4$ est un diviseur de a .

$3n+4 \mid 13n-21 \Rightarrow 3n+4 \mid 3(13n-21)$, soit $3n+4 \mid 39n-63 \Rightarrow 3n+4 \mid 13(3n+4)-115$.
On sait que $a \mid b$ et $a \mid c \Rightarrow a \mid b-c$.
$3n+4 \mid 13(3n+4)-115 \Rightarrow 3n+4 \mid 115$.

$115 = 5\times23$, produit de deux nombres premiers, donc les diviseurs de 115 sont 115 , 23 , 5 , 1 , -5 , -23 , -115 .
$3n+4 = 115 \Rightarrow 3n = 111 \Rightarrow n = 37$.
$3n+4 = 23 \Rightarrow 3n = 19$, impossible.
$3n+4 = 5 \Rightarrow 3n = 1$, impossible.
Tous les autres cas imposent n négatif, ce qui est contradictoire avec l'énoncé.
La seule solution est $n = 37$.

<u>Vérification</u> : $n = 37 \Rightarrow \frac{13n-21}{3n+4} = \frac{460}{115} = 4$.