Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

L'utilisation de plusieurs méthodes sera appréciée **(Δ , racines évidentes, S et P , forme canonique).**

a) $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})\, x + \sqrt{6} = 0$

- Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 4\sqrt{6} = (2 + 2\sqrt{2}.\sqrt{3} + 3) - 4\sqrt{6} = 5 + 2\sqrt{6} - 4\sqrt{6} = 5 - 2\sqrt{6}$.

Cette présentation est difficilement exploitable.

Remarquons que $5 - 2\sqrt{6} = (3 - 2\sqrt{6} + 2) = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$.

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{2} = \sqrt{2} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{2} = \sqrt{3} \end{cases} \text{, soit } S = \{\sqrt{2}\ ; \sqrt{3}\} .$$

- S et P : Deux nombres x_1 et x_2 ayant pour somme S et pour produit P sont racines de $X^2 - SX + P = 0$.

En *identifiant* $X^2 - SX + P = 0$ avec $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})\, x + \sqrt{6} = 0$, on obtient $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ P = x_1 \times x_2 = \sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3} \end{cases}$.

On déduit $S = \{\sqrt{2}\ ; \sqrt{3}\}$.

- Forme canonique :

$$x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})\, x + \sqrt{6} = \left(x - \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}\right)^2 + \sqrt{6} = \left(x - \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(2 + 2\sqrt{6} + 3) + \sqrt{6} ,$$

$$x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})\, x + \sqrt{6} = \left(x - \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{5 - 2\sqrt{6}}{4} = \left(x - \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{4} .$$

L'équation $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})\, x + \sqrt{6} = 0$ devient $\left(x - \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}\right)^2 - \dfrac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{4} = 0$ ou $\left(x - \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{4}$.

Deux éventualités : $x - \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{3}$; $x - \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} = -\dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x_2 = \sqrt{2}$.

On déduit : $S = \{\sqrt{2}\ ; \sqrt{3}\}$.

A l'évidence, la méthode la plus rapide et la plus simple est S et P , *les deux autres imposant une mise sous forme de carré de* $5 - 2\sqrt{6}$ *pas très évidente.*

b) $\mathbf{-3x^2 + 8x = 5 \;\Leftrightarrow\; 3x^2 - 8x + 5 = 0}$ **.**

- Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4\times3\times5 = 64 - 60 = 4$.

  $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8 - 2}{6} = +1 \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8 + 2}{6} = +\dfrac{5}{3} \end{cases}$, soit $S = \{+1\,;\,+\dfrac{5}{3}\}$.

- Racine évidente $+1$: $a + b + c = 0$ $(3 + (-8) + 5 = 0)$.

  Les racines sont $\begin{cases} x_1 = +1 \\ x_2 = \dfrac{c}{a} = +\dfrac{5}{3} \end{cases}$, soit $S = \{+1\,;\,+\dfrac{5}{3}\}$.

- Forme canonique : $3x^2 - 8x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \dfrac{8}{3}x + \dfrac{5}{3} = 0 \Leftrightarrow (x - \dfrac{4}{3})^2 - \dfrac{16}{9} + \dfrac{5}{3} = 0 \Leftrightarrow (x - \dfrac{4}{3})^2 = \dfrac{1}{9}$.

  Deux éventualités : $\begin{cases} x - \dfrac{4}{3} = +\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x_1 = +\dfrac{3}{3} = +1 \\ x - \dfrac{4}{3} = -\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x_2 = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$, soit $S = \{+1\,;\,+\dfrac{5}{3}\}$.