Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$, en utilisant la méthode la plus pertinente :

a) $x^2 + 3x = 0$

Le terme de gauche ne contient pas de monôme constant, on va factoriser x :

$x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \end{cases}$. On déduit $S = \{-3 ; 0\}$.

En utilisant Δ, ce qui n'est pas interdit : $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4\times1\times0 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3-3}{2} = -3 \\ x'' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3+3}{2} = 0 \end{cases}$.

On retrouve $S = \{-3 ; 0\}$. *Beurk pour la méthode !*

b) $-4x^2 + 3x + 1 = 0$

Remarque : a et c sont de signes contraires, ce qui nous assure qu'il existe des solutions à cette équation.

Sans que cela ne soit une obligation, le risque d'erreur de calcul est moindre lorsque a est positif :

$-4x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0$.

Inutile d'utiliser Δ : Racine évidente : $a + b + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} x' = +1 \\ x'' = \dfrac{c}{a} = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$, soit $S = \{-\frac{1}{4} ; +1\}$.

En utilisant Δ : $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\times4\times(-1) = 25 \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-5}{8} = -\dfrac{1}{4} \\ x'' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+5}{8} = +1 \end{cases}$. On retrouve $S = \{-\frac{1}{4} ; +1\}$.

c) $-x^2 + x - 1 = 0$

Changeons les signes (moindre risque d'erreur avec $a > 0$) : $x^2 - x + 1 = 0$.

On doit utiliser $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times1\times1 = -3 < 0$. L'équation n'admet pas de solution réelle.

Remarque : Lorsque a et c sont de signes contraires, on peut affirmer qu'il existe des solutions pour l'équation, mais cela ne signifie pas que lorsque a et c sont de même signe, comme ici, il n'y a pas de solution.

Tout dépend du signe de Δ.

d) $4x^2 + 2x - 12 = 0$

Moins l'expression est compliquée, moins on risque une erreur de calcul.

L'expression est nulle, on peut tout diviser par 2 : $2x^2 + x - 6 = 0$.

Remarques : a et c sont de signes contraires, l'équation admet des solutions.

$a + b + c \neq 0$ et $a - b + c \neq 0$. Il n'y a pas de racine évidente $+1$ ou -1.

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times2\times(-6) = 49 > 0$, soit $\begin{cases} x' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-7}{4} = -2 \\ x'' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+7}{4} = +\dfrac{3}{2} \end{cases}$, soit $S = \{-2 ; +\frac{3}{2}\}$.

e) $-8x^2 + 8x - 2 = 0$

L'expression est nulle, on peut tout diviser par -2 : $4x^2 - 4x + 1 = 0$.

<u>*Remarque*</u> : Un œil avisé détecte une identité remarquable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

$4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0$, soit $x = +\frac{1}{2}$. On conclue $S = \{+\frac{1}{2}\}$.

En utilisant Δ : $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\times4\times1 = 0$, il y a racine double $x' = x'' = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$.

<u>*Remarque*</u> : L'expression « racine double » vient du fait que l'on est en présence d'une forme $(a + b)^2$:

$(2x + 1)^2 = (2x + 1)(2x + 1)$, chaque facteur donnant la même racine $x = -\frac{1}{2}$ (2 fois la même).

On peut aussi remarquer qu'en reportant $\Delta = 0$ dans $\begin{cases} x' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x'' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$, on retrouve $x' = x'' = -\frac{b}{2a}$.