On considère la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_0 = 0$ et, pour tout entier n, $v_{n+1} = v_n + 2n + 1$.
Déterminer l'écriture de v_n en fonction de n .

$v_{k+1} = v_k + 2k + 1 \Leftrightarrow v_{k+1} - v_k = 2k + 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
Cette présentation en « différence de deux termes consécutifs de la suite » est assez courante, et s'exploite en additionnant ces différences, de $k = 0$ à $k = n - 1$.
On constate alors que tous les termes de la somme s'éliminent deux à deux, sauf le premier et le dernier :

$(v_n - v_{n-1}) + (v_{n-1} - v_{n-2}) + (v_{n-2} - v_{n-3}) + \ldots. + (v_3 - v_2) + (v_2 - v_1) + (v_1 - v_0) =$
$[2(n-1) + 1] + [2(n-2) + 1] + [2(n-3) + 1] + \ldots + (2\times 2 + 1) + (2\times 1 + 1) + (2\times 0 + 1)$,
$v_n - v_0 = 2[1 + 2 + 3 + \ldots. + (n-3) + (n-2) + (n-1)] + (1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + 1 + 1)$,
On sait que $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n-1)}{2}$, donc $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \dfrac{(n-1)n}{2}$.
D'où : $v_n = n(n-1) + (1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + 1 + 1) = n(n-1) + n = n^2$.

<u>**Notation Symbolique**</u> (la seule qui serait utilisée post-bac :
$v_{k+1} - v_k = 2k + 1$, $\forall k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow v_k - v_{k-1} = 2(k-1) + 1 \Leftrightarrow v_k - v_{k-1} = 2k - 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
On déduit : $\sum_{k=1}^{n}(v_k - v_{k-1}) = 2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)$,
$\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} v_{k-1}\right) = 2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - n \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} v_k\right) = 2\,\dfrac{n(n+1)}{2} - n$,
On remarquera le subtil jeu sur les indices, qui laisse les quantités identiques :
$$\sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1} + v_n \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-2} + v_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} v_{k-1} .$$

Par soustraction, on retrouve : $v_n - v_0 = n(n+1) - n = n^2$.

Une démonstration par récurrence est plus facile, mais elle impose de connaître ou d'avoir conjecturé $v_n = n^2$, ce qui n'est pas toujours évident.