<u>Question 1</u> :

Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats seront arrondis au centième.

1/ La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A , est une variable aléatoire X , qui suit une loi exponentielle de paramètre λ , où λ est un réel strictement positif.

On sait que $P(X \leq 2) = 0{,}15$, déterminer la valeur exacte du réel λ .

Loi exponentielle : $P(X \leq a) = P(X < a) = 1 - e^{-\lambda a}$, d'où : $P(X \leq 2) = 0{,}15 \Leftrightarrow 1 - e^{-2\lambda} = 0{,}15$,

$e^{-2\lambda} = 0{,}85 \Leftrightarrow -2\lambda = \ln(0{,}85) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}\ln(0{,}85) = 0{,}08125.$

Dans la suite de l'exercice, on prendra 0,081 pour valeur de λ .

2-a) Déterminer $P(X \geq 3)$.

Loi exponentielle : $P(X \geq a) = P(X > a) = 1 - P(X < a) = e^{-\lambda a}$, d'où : $P(X \geq 3) = e^{-3\lambda} = e^{-0{,}243} = 0{,}784$ (78,4%) .

b) Montrer que, pour tous réels positifs t et h : $P_{x \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$.

Application de la formule de Bayes (probabilités des causes) : $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Preuve :

On sait $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$, d'où : $P_B(A) = \dfrac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)}$.

Posons $A = X \geq t + h$ et $B = X \geq t$. D'où $A \cap B = X \geq t + h$, soit $A \cap B = A$.

$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(B)}$ (seulement dans ce cas précis) , soit $P_{X \geq t}(X \geq t + h) = \dfrac{P(X \geq t + h)}{P(X \geq t)} = \dfrac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}}$,

$P_{X \geq t}(X \geq t + h) = \dfrac{e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h}$, soit : $P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$.

On dit que la loi exponentielle est <u>*sans mémoire*</u> .

c) Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans ?

D'après la formule précédente : $P_{X \geq 3}(X \geq 5) = P(X \geq 2) = e^{-2\lambda} = e^{-0{,}162} = 0{,}850$ (85%) .

Cela signifie que, même s'il a déjà fonctionné pendant 3 ans, la probabilité pour que le moteur fonctionne encore au moins 2 ans, est identique à celle étant neuf, de fonctionner au moins 2 ans.

L'affirmation est paradoxale, mais c'est la conséquence de la loi exponentielle.

d) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X , et donner une interprétation de ce résultat.

On sait que $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0{,}081} = 12{,}34$ années.

En moyenne, un moteur a une durée de vie de 12,34 années.

3/ Dans la suite de cet exercice, on donnera des valeurs arrondies à 10^{-3} .

L'entreprise A annonce que le pourcentage de moteurs défectueux dans sa production est égal à 1% .

Afin de vérifier cette affirmation, 800 moteurs sont prélevés au hasard. On constate que 15 moteurs sont détectés défectueux.

Le résultat de ce test remet-il en cause l'annonce de l'entreprise A ? Justifier. On pourra s'aider d'un intervalle de fluctuation.

On peut utiliser l'intervalle de confiance autour d'une fréquence observée $I.C = [\, f_{\text{obs}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \,;\, f_{\text{obs}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \,]$, tout autant que l'intervalle de fluctuation $I.F = [f_{\text{obs}} - 1{,}96\cdot\frac{f_{\text{obs}}(1-f_{\text{obs}})}{\sqrt{n}} \,;\, f_{\text{obs}} + 1{,}96\cdot\frac{f_{\text{obs}}(1-f_{\text{obs}})}{\sqrt{n}}\,]$, pour estimer la proportion p de moteurs défectueux, dans l'ensemble de la production, au seuil de 95.

La formule $I.F.$ fournit toujours un intervalle plus étroit que $I.C.$, donc est préférable.

$f_{\text{obs}} = \frac{15}{800} = 0{,}019$ et $n = 800$.

Les conditions d'utilisation sont vérifiées : $n \geq 30$, $n.f_{\text{obs}} \geq 5$ et $n.(1 - f_{\text{obs})} \geq 5$.

$I.F.$ = [0,0177 ; 0,203] , qui ne contient pas $p = 0{,}010$ annoncé par le constructeur.

Avec un risque d'erreur sur 5% des échantillons possibles de 800 moteurs, on peut rejeter l'annonce de l'entreprise A .