Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- **40% des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;**
- **25% des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».**

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion de bouteilles de « pur jus » est notée x, où x est un réel de l'intervalle $[0 ; 1]$.

Par ailleurs, 20% des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les évènements suivants :

- ***R* : « la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange » ;**
- ***J* : « la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».**

__Partie A__ :

1/ Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

0,25 ↗ J

R

0,40 ↗ 0,75 ↘ $\overline{J}$

•

0,60 ↘ x ↗ J

$\overline{R}$

1 - x ↘ $\overline{J}$

2/ Déterminer la valeur exacte de x.

$p(J) = p(R \cap J) + p(\overline{R} \cap J) = p(R) \times p_R(J) + p(\overline{R}) \times p_{\overline{R}}(J) = 0{,}40 \times 0{,}25 + 0{,}60 \times x = 0{,}10 + 0{,}60x = 0{,}20$.

On déduit : $0{,}60x = 0{,}10$, soit $x = \dfrac{1}{6}$.

3/ Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».

Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

$$p_J(R) = \frac{p(R \cap J)}{p(J)} = \frac{0{,}40 \times 0{,}25}{0{,}20} = \frac{0{,}10}{0{,}20} = 0{,}50 .$$

__Partie B__ :

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot.

On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1/ Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. On en donnera les paramètres.

X suit la loi binomiale $X = B(500 ; 0{,}20)$, $n = 500$ bouteilles, $p = 0{,}20$ probabilité que la bouteille soit « pur jus ».

2/ Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus ». On arrondira le résultat au millième.

La calculatrice, directement en travaillant sur la loi binomiale donne :

$p(X \geq 75) = 1 - p(X < 75) = 1 - p(X \leq 74)$ afin d'utiliser la fonction de répartition $F(x) = p(0 \leq X \leq x)$.

On obtient : $p(X \geq 75) = 0{,}0016$, soit $p = 0{,}002$ arrondi au millième.

Comme $n > 30$, $np = 100 > 5$ et $n(1-p) = 400 > 5$, on peut utiliser la loi normale $X = N(\mu\ ;\ \sigma^2)$ avec

$\mu = E(X) = np = 100$ et $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{80}$, soit $X = N(500\ ;\ 80)$.

$p(X \geq 75) = 0{,}002$.

<u>**Partie C**</u> :

Un fournisseur assure que 90% des bouteilles de sa production de pur jus d'orange contiennent moins de 2% de pulpe.

Le service qualité du supermarché prélève un échantillon de 900 bouteilles afin de vérifier cette affirmation.

Sur cet échantillon , 766 bouteilles présentent moins de 2% de pulpe.

1/ Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion de bouteilles contenant moins de 2% de pulpe au seuil de 95%.

$I.F. = [\ p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ] = [\ 0{,}90 - 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}90\times 0{,}10}}{\sqrt{900}}\ ;\ 0{,}90 + 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}90\times 0{,}10}}{\sqrt{900}}\ ]$,

$I.F. = [0{,}8804\ ;\ 0{,}9196]$.

Cet intervalle est celui dans lequel peut normalement fluctuer la fréquence observée du phénomène étudié f_{obs} , lorsqu'on étudie un échantillon de taille 900 , au seuil de 95% , ce qui signifie que 5% des échantillons de cette population peuvent cependant présenter une fréquence sortant de cet intervalle.

2/ Que penser de l'affirmation du fournisseur ?

La fréquence observée dans l'échantillon est $f_{obs} = \dfrac{766}{900} = 0{,}851$, qui n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation asymptotique précédent.

Cela signifie, qu'au risque d'une erreur, pour 5% des échantillons concernés, on ne peut pas accorder crédit à l'affirmation du fournisseur, selon laquelle 90% de sa production de pur jus contient moins de 2% de pulpe.