On sait que 39% de la population française appartient au groupe sanguin A+ .

On cherche à savoir si cette proportion est la même parmi les donneurs de sang.

Pour cela, on interroge 183 donneurs de sang, et on constate que 34% d'entre eux appartiennent au groupe sanguin A+ .

Que peut-on dire de l'affirmation suivante :

« On ne peut pas rejeter, au seuil de 5%, l'hypothèse selon laquelle la proportion, parmi les donneurs de sang, de personnes du groupe sanguin A+ est de 39%, à l'identique de l'ensemble de la population française » .

Explication détaillée de la méthode de résolution :

1ère information :

Soit $n = 183$ donneurs de sang. Sur chacun d'entre eux, on fait le test de leur appartenance au groupe sanguin A+ , schéma de Bernoulli, de probabilité supposée $p = 0{,}39$, comme dans la population française totale.

On constate $k = 183 \times 0{,}34 = 62$ donneurs de groupe A+ (62,22 , écart probablement dû au problème d'arrondi sur 34%).

$X = k$ suit la loi binomiale $X = B(n\,;p) = B(183\,;0{,}39)$, d'où : $p(X = 62) = \binom{183}{62}(0{,}39)^{62}(0{,}61)^{121} = 0{,}022$.

Ce résultat est sans rapport avec la question posée !

Il signifie simplement que, si on tire au hasard 183 personnes sur l'effectif national des donneurs de sang, sans remise, avec une probabilité de 0,39 d'être du groupe A+ , on obtienne 62 personnes du groupe A+ , parmi ces personnes.

Il n'y a aucun rapport avec un échantillon spécifique de 183 donneurs de sang.

2ème information :

La loi binomiale $X = B(n\,;p)$ admet pour espérance $E(X) = \overline{X} = n.p$, soit $E(X) = 183 \times 0{,}39 = 71{,}37$ donneurs de groupe A+ , pour un échantillon de 183 donneurs.

Cet écart de $71{,}37 - 62{,}22 = 9{,}15$ personnes de groupe A+, spécifique à l'échantillon de 183 donneurs étudié, est-il suffisamment significatif pour remettre en cause la proportion de 39% de groupe A+, à l'échelon national, parmi les donneurs de sang. *Voilà le sujet de l'exercice*.

Résolution :

La fréquence constatée de groupe A+, pour l'échantillon de $n = 183$ donneurs, est $f_n = \dfrac{X_n}{n} = 0{,}34$.

$n = 183 > 30$, $np = 62{,}22 > 5$ et $n(1-p) = 122{,}61 > 5$, donc on peut passer à la *limite asymptotique* $n \to +\infty$, et assimiler la loi $X = B(n\,;p)$ à une loi normale centrée et réduite, en posant $T = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)} = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

$Prob\,(-1{,}96 \leq T \leq 1{,}96) = 0{,}95$.

$Prob\,\left(-1{,}96 \leq \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq 1{,}96\right) = 0{,}95 \Leftrightarrow Prob\,\left(np - 1{,}96\sqrt{np(1-p)} \leq X_n \leq np + 1{,}96\sqrt{np(1-p)}\right) = 0{,}95$.

On déduit : $\boldsymbol{Prob\left(p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{X_n}{n} \leq p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) = 0{,}95}$.

Dans le cas présent $F_n = \dfrac{X_n}{n} = 0{,}34$, $p = 0{,}36$, $n = 183$, d'où l'intervalle de fluctuation asymptotique, au seuil de 5% de la fréquence constatée F_n de donneurs du groupe A+ : $I = [0{,}319\,;0{,}461]$.

On constate que $F_n = 0{,}34$ appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique I , donc au seul de 5%, il n'y a pas de motif à considérer que les donneurs de sang ne représentent pas la même fréquence de 39% issus du groupe A+, à l'identique de l'ensemble de la population française.