Soient les nombres complexes $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$, $z_2 = 2 - 2i$ et $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1/ Ecrire Z sous forme algébrique.

$$Z = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2 - 2i} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{(1 + i\sqrt{3})(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} .$$

On sait que $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ et $(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$.

$$Z = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{(1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})}{2} \text{, soit } Z = \frac{\sqrt{2}}{4}[(1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})] = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} .$$

2-a) Déterminer le module et l'argument de z_1 et z_2 , puis les écrire sous forme exponentielle.

$$z = a + ib \Rightarrow r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ et } \theta = \text{Arg}(z) \text{ vérifiant } \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{r} \end{cases} .$$

$$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6} \Rightarrow r_1 = |z_1| = \sqrt{2 + 6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ et } \theta_1 = \text{Arg}(z_1) \text{ vérifiant } \begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{, d'où } \theta_1 = \frac{\pi}{3} [2\pi] .$$

On déduit $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = 2\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}) = r_1.e^{i\theta_1} = 2\sqrt{2}.e^{i\pi/3}$.

$$z_2 = 2 - 2i \Rightarrow r_2 = |z_2| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ et } \theta_2 = \text{Arg}(z_2) \text{ vérifiant } \begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_2 = -\dfrac{2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{, d'où } \theta_2 = -\frac{\pi}{4} [2\pi] .$$

On déduit $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = 2\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4}) = r_2.e^{i\theta_2} = 2\sqrt{2}.e^{-i\pi/4}$.

b) En déduire le module et l'argument de Z .

$$|Z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1 \text{ et } \text{Arg}(Z) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12} [2\pi] .$$

c) Déterminer les valeurs de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

$$Z = 1.e^{7i\pi/12} = \cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \text{. On déduit } \begin{cases} \cos\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \\ \sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{cases} .$$

3/ Pour le dessin, on prendra 2 cm pour unité.

On désigne par A , B et C les points d'affixes respectives z_1 , z_2 et Z .

Placer le point B , puis les points A et C, en utilisant la règle (non graduée) et le compas. Laisser les traits de construction apparents.

Voir plus bas.

4/ Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe Z^{2012} .

On sait que $z = r.e^{i\theta} \Rightarrow z^n = r^n.e^{ni\theta}$, soir $Z^{2012} = 1.[\cos\left(2012\times\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(2012\times\frac{7\pi}{12}\right)]$.

$2012 \times 7\pi = 14\ 084\pi$ et 1 Tour $= 2\pi = \frac{24\pi}{12}$.

$14\ 084 = 586 \times 24 + 20 \Rightarrow 2012 \times \frac{7\pi}{12} = 586 \times 2\pi + \frac{20\pi}{12}$, avec $\frac{20\pi}{12} = \frac{5\pi}{3}$.

On déduit : $Z^{2012} = \cos\frac{5\pi}{3} + i \sin\frac{5\pi}{3} = \cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Dessin :