**Déterminer les limites suivantes :**

**a)** $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2.e^x$ .

Sachant $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$ , l'expression est de forme indéterminée $0 \times \infty$ .

Ramenons le calcul à la forme indéterminée $\lim\limits_{x \to -\infty} x.e^x = 0$ .

$x^2.e^x = (x.e^{x/2})^2$ . On pose $X = \dfrac{x}{2}$ , soit $x = 2X$ , avec $\lim\limits_{x \to -\infty} X = -\infty$ : $x^2.e^x = (2X.e^X)^2 = 4(X.e^X)^2$ ,

avec $\lim\limits_{X \to -\infty} X.e^X = 0$ . On déduit : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2.e^x = 0$ .

**b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^2}$ .

Sachant $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ , l'expression est de forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$ .

Ramenons le calcul à la forme indéterminée $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ .

$\dfrac{e^{2x}}{x^2} = \left(\dfrac{e^x}{x}\right)^2$ . Sachant $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ , on déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^2} = +\infty$ .

c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} xe^{\frac{1}{x}}$ .

Sachant $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x}$ , aussi notée $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ , soit $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ , l'expression est de forme indéterminée $0 \times \infty$ .

Posons $X = \dfrac{1}{x}$ , soit $x = \dfrac{1}{X}$ , avec $\lim\limits_{x \to 0^+} X = +\infty$ . On déduit : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} xe^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X \to +\infty} \left(\dfrac{1}{X}.\, e^X\right) = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ .

d) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ .

Sachant $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x}$ , aussi notée $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ , , soit $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0^+$ , l'expression est de forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$ .

Posons $X = \dfrac{1}{x}$ , soit $x = \dfrac{1}{X}$ , avec $\lim\limits_{x \to 0^-} X = -\infty$ : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \left(\dfrac{1}{x}\, e^{\frac{1}{x}}\right) = \lim\limits_{X \to -\infty} X\, e^X = 0$ .

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$ .

L'expression est indéterminée, de forme $\dfrac{0}{0}$ . On sait $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x - 0} = \exp'(0) = e^0 = 1$ .

$\dfrac{e^{2x} - 1}{x} = \dfrac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{x} = \dfrac{e^x - 1}{x} \times (e^x + 1)$ , d'où : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x} = \left(\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}\right) \times \lim\limits_{x \to 0} (e^x + 1) = 1 \times 2 = 2$ .

*Autre méthode* :

$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x}$ . Posons $X = 2x$ , avec $\lim_{x \to 0} X = 0$ .

On déduit : $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = 2 \lim_{X \to 0} \frac{e^{X} - 1}{X} = 2 \times 1 = 2$ .

**f)** $\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)}$ **.**

Sachant $\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$ , on déduit que $\lim_{x \to +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$ est de forme indéterminée $0 \times \infty$ .

Soit $X = \frac{1}{x}$ , avec $x = \frac{1}{X}$ et $\lim_{x \to +\infty} X = 0^+$ .

$\lim_{x \to +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{X \to 0} \left[\frac{1}{X}(e^X - 1)\right] = \lim_{X \to 0} \frac{e^X - 1}{X} = \exp'(0) = e^0 = 1$ .