Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 2}{e^x + 1}$.

Sachant $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, l'expression est indéterminée, de forme $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$\dfrac{e^x - 2}{e^x + 1} = \dfrac{e^x(1 - \frac{2}{e^x})}{e^x(1 + \frac{1}{e^x})} = \dfrac{1 - \frac{2}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}}$, avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$. On déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 2}{e^x + 1} = \dfrac{1}{1} = 1$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1}$.

Sachant $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, l'expression est indéterminée, de forme $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$\dfrac{e^{2x}}{e^x + 1} = \dfrac{(e^x)^2}{e^x(1 + \frac{1}{e^x})} = \dfrac{e^x}{1 + \frac{1}{e^x}}$, avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$. On déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{1} = +\infty$.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x + 1}{e^x}$.

Sachant $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$, $\begin{cases} e^x + 1 \to 1 \\ e^x \to 0^+ \end{cases}$ d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x + 1}{e^x} = +\infty$.

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x}$.

Sachant $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$, $\begin{cases} e^x \to 0^+ \\ x \to -\infty \end{cases}$ d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x} = 0^-$.