Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = 1$ **.**

$\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{1+x} = e \Leftrightarrow 1-x = e(1+x) \Leftrightarrow e.x + x = 1-e \Leftrightarrow x(1+e) = 1-e$, soit $S = \{\dfrac{1-e}{1+e}\}$.

b) $\ln^2(2x+1) = 1$ **.**

$$\ln^2(2x+1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(2x+1) = 1 \Leftrightarrow 2x+1 = e \Leftrightarrow x = \dfrac{e-1}{2} \\ \ln(2x+1) = -1 \Leftrightarrow 2x+1 = \dfrac{1}{e} \Leftrightarrow x = \dfrac{\frac{1}{e}-1}{2} = \dfrac{1-e}{2e} \end{cases}$$

. D'où $S = \{\dfrac{e-1}{2} ; \dfrac{1-e}{2e}\}$.

c) $\ln^2 x + 2\ln x - 3 = 0$ **.**

Posons $X = \ln x$, d'où : $X^2 + 2X - 3 = 0$, de racines $X = -3$ et $X = +1$.

$$\begin{cases} X = \ln x = -3 \Leftrightarrow x = e^{-3} = \dfrac{1}{e^3} \\ X = \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e \end{cases}$$

, d'où : $S = \{\dfrac{1}{e^3} ; e\}$.

d) $\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x} > 1$ **.**

$\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{1-\ln x}{1+\ln x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{(1 - \ln x)-(1+\ln x)}{1+\ln x} > 0 \Leftrightarrow -2\dfrac{\ln x}{1+\ln x} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{1+\ln x} < 0$.

L'inéquation $\dfrac{X}{1+X} > 0$ admet pour solution $X < -1$ ou $X > 0$ (après tableau de signes).

$$\begin{cases} \ln x < -1 \Leftrightarrow x < e^{-1} \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{e} \\ \text{ou} \\ \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1 \end{cases}$$

. Par ailleurs, $\ln x$ impose $x > 0$. On conclue : $S =]\,0 ; \dfrac{1}{e}\,[\cup]\,1 ; +\infty\,[$.

e) $\ln^2 x - 3\ln x + 2 \le 0$ **.**

Soit $X = \ln x$, ce qui impose $x > 0$. L'inéquation $X^2 - 3X + 2 \le 0$ impose $1 \le X \le 2$, soit $1 \le \ln x \le 2$.

On déduit : $e \le x \le e^2$, soit $S = [e ; e^2]$.

f) $\ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right) < 0$ **.**

$\ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$ impose $\dfrac{e^x+1}{e^x-1} > 0$, pour que le logarithme existe, et $\dfrac{e^x+1}{e^x-1} < 1$, pour satisfaire l'inéquation.

Comme $e^x + 1 > 0$, il faut imposer $e^x - 1 > 0$, soit $e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

Sachant $e^x - 1 > 0$, $\dfrac{e^x+1}{e^x-1} < 1 \Leftrightarrow e^x + 1 < e^x - 1 \Leftrightarrow 1 < -1$, ce qui est impossible. D'où : $S = \varnothing$.