Déterminer les limites suivantes :

a) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{x+1}$.

$\displaystyle \lim_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$ et $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$. L'expression est indéterminée, de forme $\frac{\infty}{\infty}$.

On sait $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$: $\displaystyle \frac{e^{2x}}{x+1} = \frac{e^x}{x} \times \frac{x}{x+1} \times e^x = \frac{e^x}{x} \times e^x \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$, d'où $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{x+1} = (+\infty)(+\infty)(1) = +\infty$.

b) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}}$.

Forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. On sait $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$:

$\displaystyle \frac{e^x}{\sqrt{x}} = \frac{e^x}{x} \times \sqrt{x} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = (\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x})(\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$.

c) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} (1-x^2)e^x$.

Forme indéterminée $0 \times \infty$: $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} (1-x^2)e^x = (\lim_{x \to -\infty} e^x) - (\lim_{x \to -\infty} x^2e^x) = 0 - (\lim_{x \to -\infty} x^2e^x)$.

On sait que, pour tout réel $\alpha > 0$, $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} x^{\alpha}e^x = 0$ (l'exponentielle l'emporte sur les puissances de x) ,

d'où : $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} (1-x^2)e^x = 0$.

Pour revenir à la formule de base : $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} x.e^x = 0$: $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} x^2e^x = \lim_{x \to -\infty} (xe^{x/2})^2 = (\lim_{x \to -\infty} (xe^{x/2}))^2$.

On pose $X = x/2$, soit $x = 2X$: $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} x^2e^x = (\lim_{X \to -\infty} (2X.e^X))^2 = 4(\lim_{X \to -\infty} X.e^X)^2 = 0$.

d) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} x.e^{2x}$.

Forme indéterminée $0 \times \infty$. On pose $X = 2x$, soit $x = \frac{X}{2}$.

$\displaystyle \lim_{x \to -\infty} x.e^{2x} = \frac{1}{2} \lim_{X \to -\infty} X.e^X = 0$, puisque $\displaystyle \lim_{X \to -\infty} X.e^X = 0$.

e) $\displaystyle \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x.e^{\frac{1}{x}}$.

$\frac{1}{x} \to +\infty$, d'où $e^{\frac{1}{x}} \to +\infty$, on est en forme indéterminée $0 \times \infty$.

On pose $X = \frac{1}{x}$, soit $X \to +\infty$: $\displaystyle x.e^{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \frac{e^X}{X}$. D'où : $\displaystyle \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x.e^{\frac{1}{x}} = \lim_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$.

f) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ **.**

$\dfrac{1}{x} \to -\infty$, d'où $e^{\frac{1}{x}} \to 0$, on est en forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$.

$\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \dfrac{1}{x}.e^{\frac{1}{x}} = Xe^X$ en posant $X = \dfrac{1}{x}$, d'où $X \to -\infty$. On déduit : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{X \to -\infty} X e^X = 0$.

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$ **.**

Forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - e^0}{x - 0}$. Soit $f(x) = e^{2x}$, on déduit $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$.

Or : $f(x) = e^{2x} \Rightarrow f'(x) = 2.e^{2x}$, soit $f'(0) = 2.e^0 = 2$. On déduit : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x} = 2$.

h) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{e^x - e}$ **.**

Forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{e^x - e} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^x - e}{x - 1}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^x - e^1}{x - 1}} = \dfrac{1}{\exp'(1)} = \dfrac{1}{e^1} = \dfrac{1}{e}$.