Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $\dfrac{e^{-2x}-3}{e^{-2x}-1}=2$ **.**

Domaine de définition : $e^{-2x}-1=0 \Leftrightarrow e^{-2x}=1 \Leftrightarrow -2x=0 \Leftrightarrow x=0$, soit $D=\mathbb{R}-\{0\}$.

$\dfrac{e^{-2x}-3}{e^{-2x}-1}=2 \Leftrightarrow e^{-2x}-3=2e^{-2x}-2 \Leftrightarrow e^{-2x}=-1$, ce qui est impossible, puisque $e^{A}>0$, pour tout A réel.

On déduit : $S=\varnothing$.

b) $\dfrac{2e^{x}-1}{e^{x}+1}<1$ **.**

Domaine de définition : $e^{x}+1>0$ pour tout x réel, soit $D=\mathbb{R}$.

Comme $e^{x}+1>0$ pour tout x réel : $\dfrac{2e^{x}-1}{e^{x}+1}<1 \Leftrightarrow 2e^{x}-1<e^{x}+1 \Leftrightarrow e^{x}<2 \Leftrightarrow x<\ln(2)$. D'où : $S=]-\infty\,;\ln(2)[$.

c) $e^{2x}+2e^{x}-3=0$ **.**

Soit $X=e^{x}$, d'où $e^{2x}=(e^{x})^2=X^2$.

L'équation devient $X^2+2X-3=0$, de solutions $X=+1$ et $X=-3$.

$X=+1 \Leftrightarrow e^{x}=1 \Leftrightarrow x=\ln(1)=0$.

$X=-3 \Leftrightarrow e^{x}=-3$, équation impossible, puisque $e^{A}>0$, pour tout A réel. On déduit : $S=\{0\}$.

d) $e^{-2x}-e^{-x}-2\leq 0$ **.**

Soit $X=e^{-x}$, d'où $e^{-2x}=(e^{-x})^2=X^2$.

L'inéquation devient $X^2-X-2<0$. Les racines de l'équation sont $X=-1$ et $X=+2$.

$X^2-X-2<0 \Leftrightarrow -1<X<2 \Leftrightarrow -1<e^{-x}<2 \Leftrightarrow e^{-x}<2$, puisque $e^{A}>0$, pour tout A réel.

$e^{-x}<2 \Leftrightarrow -x<\ln(2) \Leftrightarrow x>-\ln(2)$, d'où : $S=]-\ln(2)\,;+\infty[$.