Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $\boldsymbol{e^{2x+1} = -2}$

e^A est défini pour tout A réel, mais e^A est toujours <u>strictement</u> positif.

L'équation proposée n'admet pas de solution : $S = \varnothing$.

b) $\boldsymbol{e^{2x+1} = 0}$

Pour les mêmes raisons, e^A strictement positif, il n'y a pas de solution : $S = \varnothing$.

c) $\boldsymbol{e^{2x+1} = 1}$

On sait que $e^A = e^B \Leftrightarrow A = B$ (injectivité).

$e^{2x+1} = 1 \Leftrightarrow e^{2x+1} = e^0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0$, soit $x = -\frac{1}{2}$, d'où $S = \{ -\frac{1}{2} \}$.

d) $\boldsymbol{e^{2x+1} = e}$

Pour les mêmes raisons : $e^{2x+1} = e \Leftrightarrow e^{2x+1} = e^1 \Leftrightarrow 2x + 1 = 1$, soit $x = 0$, d'où $S = \{0\}$.

e) $\boldsymbol{e^{2x+1} = e^2}$

$e^{2x+1} = e^2 \Leftrightarrow e^{2x+1} = e^2 \Leftrightarrow 2x + 1 = 2$, soit $x = +\frac{1}{2}$, d'où $S = \{ +\frac{1}{2} \}$.

f) $\boldsymbol{e^{2x+1} = \frac{1}{e^2}}$

$e^{2x+1} = \frac{1}{e^2} \Leftrightarrow e^{2x+1} = e^{-2} \Leftrightarrow 2x + 1 = -2$, soit $x = -\frac{3}{2}$, d'où $S = \{ -\frac{3}{2} \}$.

g) $\boldsymbol{e^{2x} + e^x - 2 = 0}$

Sachant $e^{2x} = (e^x)^2$, on déduit $(e^x)^2 + e^x - 2 = 0$.

On pose $X = e^x$, d'où : $X^2 + X - 2 = 0$ de racines $X_1 = -2$ et $X_2 = +1$.

$X_1 = -2 \Leftrightarrow e^x = -2$, ce qui est impossible.

$X_2 = +1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$, d'où $S = \{0\}$.

h) $\boldsymbol{e^{-x} + e^x - 2 = 0}$

Sachant $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, on déduit $\frac{1}{e^x} + e^x - 2 = 0$. Multiplions les deux membres par $e^x > 0$.

$e^x.(\frac{1}{e^x} + e^x - 2) = 0 \Leftrightarrow 1 + (e^x)^2 - 2e^x = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow (e^x + 1)^2 = 0$.

Remarquer l'utilisation de $e^x \times \frac{1}{e^x} = 1$, aussi écrit $e^{-x} \times e^x = e^0 = 1$ (utilisation de $e^A \times e^B = e^{A+B}$)

On remarque que $(e^x + 1)^2 = 0$ n'a pas de solution, puisque $e^x > 0$, pour tout x réel. D'où $S = \varnothing$.