Soit u une suite arithmétique de raison $r = -1$, et de premier terme $u_0 = +1$.

Soit v la suite telle que $v_n = e^{u_n}$, pour tout entier naturel.

1/ Montrer que la suite v est géométrique. On précisera sa raison q , et son premier terme v_0 .

u arithmétique $\Leftrightarrow$ $u_{n+1} = u_n + \mathrm{C}^{\mathrm{te}} = u_n + r$.

$u_{n+1} = u_n + r \Rightarrow e^{u_{n+1}} = e^{u_n + r} = e^r.\, e^{u_n}$, soit $v_{n+1} = q.v_n$ avec $q = e^r$.

La suite v est géométrique, sa raison est l'exponentielle e^r de la raison r de la suite arithmétique u .

$v_0 = e^{u_0} = e^1 = e$ et $q = e^r = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

2/ Exprimer u_n et v_n en fonction de n .

$u_n = u_0 + n.r$, d'où $u_n = 1 - n$ et $v_n = e^{u_n} = e^{1-n}$.

On retrouve ce résultat en posant : $v_n = v_0.q^n = e.(e^{-1})^n = e^1.e^{-n} = e^{1-n}$.

3/ Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

$r = -1$, donc la suite arithmétique u diverge vers $-\infty$, ce que confirme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (1 - n) = -\infty$.

$q = \dfrac{1}{e}$ vérifie $0 < q < 1$, donc la suite géométrique v converge vers 0 , ce que confirme $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{1-n} = 0$,

puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.