f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = e^{\ln^2(x)}$.

1/ Etudier les limites de f en 0 et $+\infty$.

On sait $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$ soit $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln^2(x) = +\infty$, d'où : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{\ln^2(x)} = +\infty$.

On sait $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\ln^2(x)} = +\infty$.

2/ Etudier les variations de f .

f est définie, continue et dérivable sur $]0\,;+\infty[$, comme composée de fonctions définies, continues et dérivables sur ce même intervalle.

$f = e^u \Rightarrow f' = u'.e^u$ avec $u = v^2 \Rightarrow u' = 2v.v'$ et $v(x) = \ln(x) \Rightarrow v'(x) = \dfrac{1}{x}$.

D'où : $f'(x) = [\ln^2(x)]'.\, e^{\ln^2(x)} = 2.\ln(x).\dfrac{1}{x}.\, e^{\ln^2(x)}$, soit $f'(x) = 2\,\dfrac{\ln(x)}{x}.\, e^{\ln^2(x)}$.

Recherche des extrema : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0$, soit $x = +1$, avec $f(1) = e^{\ln^2(1)} = e^0 = +1$.

Signe de la dérivée : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > +1$.

La courbe présente un *minimum* en $E(+1\,;+1)$.

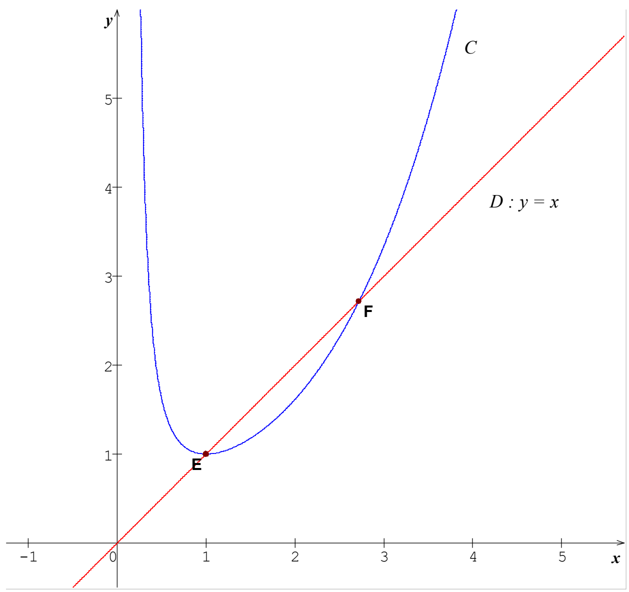
x	0		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|+\infty$	↘	$+1$	↗	$+\infty$

3/ Calculer $f(1)$ et $f(e)$.

On a vu $f(1) = 1$. Par ailleurs $f(e) = e^{\ln^2(e)} = e^1 = e$.

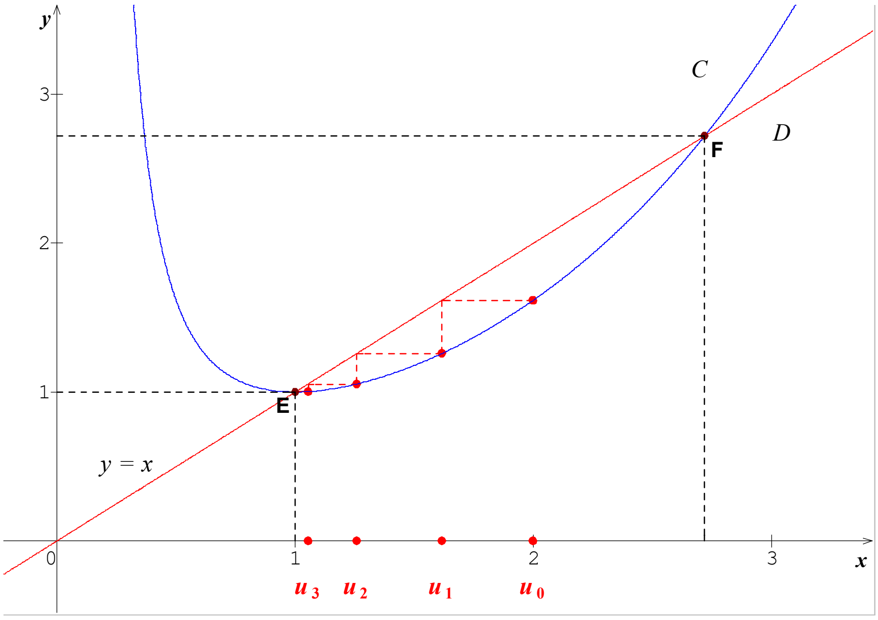
La courbe C passe par $E(1\,;1)$ et $F(e\,;e)$ tous deux situés sur D , bissectrice des axes.

4/ Tracer la courbe représentative C de la fonction f , ainsi que la droite D d'équation $y = x$.



5/ Soit la suite u telle que $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n entier naturel.

a) Justifier graphiquement que u est décroissante et minorée.



En traçant les termes u_n de la suite selon la technique en escalier, on constate bien sa décroissance $(u_0 > u_1 > u_2 \ldots..)$.

On constate que la suite u est minorée par $+1$.

Démonstration plus rigoureuse :

- On constate graphiquement que $f(x) \leq x$, pour tout x vérifiant $1 \leq x \leq e$.

  La courbe C est sous la droite D : $1 \leq x \leq e \Rightarrow f(x) \leq x$ soit $1 \leq u_n \leq e \Rightarrow f(u_n) \leq u_n$, soit $u_{n+1} \leq u_n$.

  La suite u est décroissante.

- f étant croissante : $1 \leq x \leq e \Rightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(e)$, soit $1 \leq f(x) \leq e$.

  soit : $1 \leq u_n \leq e \Rightarrow f(1) \leq f(u_n) \leq f(e)$, soit $1 \leq u_{n+1} \leq e$.

  Comme $u_0 = 2$ vérifie $1 \leq u_0 \leq e$, tous les u_n vérifient $1 \leq u_n \leq e$.

La suite u est bien décroissante et minorée par $+1$.

b) Qu'en conclure. Conjecturer la limite de la suite u .

Décroissante et minorée par $+1$, la suite u est convergente vers l qui vérifie $f(l) = l$ avec $1 \leq l < e$.

On conclue que u est convergente vers $l = +1$.