Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v})$.

On considère les points **A , B , C et D distincts, d'affixes respectives z_A , z_B , z_C et z_D tels que :**

$$\begin{cases} z_A + z_C = z_B + z_D \\ z_A + i.z_B = z_C + i.z_D \end{cases} .$$

Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un carré.

I milieu de $[AC]$ vérifie $z_I = \dfrac{z_A + z_C}{2}$ et J milieu de $[BD]$ vérifie $z_J = \dfrac{z_B + z_D}{2}$.

On conclue que I et J sont confondus.

Un quadrilatère dont les diagonales ont même milieu est un *parallélogramme*.

<u>*Autre méthode*</u> :

$z_A + z_C = z_B + z_D \Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D \Leftrightarrow Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{DC}}$, soit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Un quadrilatère dont deux côtés opposés sont des vecteurs identiques est un *parallélogramme.*

Par ailleurs :

$z_A + i.z_B = z_C + i.z_D \Leftrightarrow z_C - z_A = i(z_B - z_D) \Leftrightarrow Z_{\overrightarrow{AC}} = i.Z_{\overrightarrow{DB}} \Leftrightarrow \dfrac{Z_{\overrightarrow{AC}}}{Z_{\overrightarrow{DB}}} = i = 1.e^{+\pi/2} = [1\ ;\ +\dfrac{\pi}{2}]$.

On déduit : $\dfrac{AC}{DB} = 1 \Leftrightarrow AC = DB$ et $(\overrightarrow{DB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = +\dfrac{\pi}{2}$.

Les diagonales sont donc égales (*parallélogramme* $\Rightarrow$ *rectangle*) et perpendiculaires entre elles (*rectangle* $\Rightarrow$ *carré*) .