Déterminer :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1 + e^x)$.

On sait $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 + e^x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1 + e^x) = \ln 1 = 0$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{e^x}{e^x + 1}\right)$.

$\dfrac{e^x}{e^x + 1} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{e^x}}$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, on déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$.

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x + 1} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{e^x}{e^x + 1}\right) = \ln(1) = 0$.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(\dfrac{x^2}{1 + e^x}\right)$.

On sait $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 + e^x) = 1$. On déduit : $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(\dfrac{x^2}{1 + e^x}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2) = +\infty$.

Attention : Ne pas écrire $\ln(x^2) = 2.\ln(x)$ mais $\ln(x^2) = 2.\ln|x|$.

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1 + \ln(x)}$.

Si $x \to +\infty$: $1 + \ln(x) \to +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1 + \ln(x)} = +\infty$.

e) $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{2 + \ln(x)}$.

Si $x \to 0^+$: $2 + \ln(x) \to -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{2 + \ln(x)} = 0$.

Remarque : $e^{2 + \ln(x)} = e^2 \times e^{\ln(x)} = e^2 \times x$, avec $\lim\limits_{x \to 0^+} (e^2 \times x) = e^2 \times \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$.