Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $e^{x^2} = e^{4x-3}$

$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$, d'où : $x^2 = 4x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$, de racines $x = +1$ et $x = +3$.

On déduit $S = \{+1 ; +3\}$.

b) $e^{3x+4} = 0$

On sait que $e^a > 0$, pour tout a réel, d'où l'impossibilité que $e^{3x+4} = 0$, soit $S = \varnothing$.

c) $e^{x+7} = (e^{-2x+5})^3$

$(e^a)^b = e^{a \times b}$ et $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$, d'où : $e^{x+7} = (e^{-2x+5})^3 \Leftrightarrow e^{x+7} = e^{-6x+15}$, soit $x + 7 = -6x + 15$,

$7x = 8 \Leftrightarrow x = +\frac{8}{7}$, soit $S = \{+\frac{8}{7}\}$.

d) $e^{\frac{x+1}{-2x+5}} = e^3$

La fraction impose $-2x + 5 \neq 0$, soit $x \neq +\frac{5}{2}$.

$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$, d'où : $\frac{x+1}{-2x+5} = 3 \Leftrightarrow x + 1 = -6x + 15 \Leftrightarrow 7x = 14$, soit $x = +2$. On déduit : $S = \{+2\}$.

e) $e^{x^2-x} = 1$

$e^{x^2-x} = 1 \Leftrightarrow e^{x^2-x} = e^0$. On sait $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$, d'où : $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0$, soit $x = 0$ ou $x = +1$.

On déduit : $S = \{0 ; +1\}$.

f) $e^x = e^{\sqrt{x+1}}$

La racine impose $x + 1 \geq 0$, soit $x \geq -1$.

$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$, d'où : $x = \sqrt{x+1}$, ce qui impose $x \geq 0$, puisque résultat d'une racine carrée.

D'où : $x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$. $\Delta = b^2 - 4ac = 5$, d'où les racines $\begin{cases} x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0 \\ x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \end{cases}$.

Sachant $x \geq 0$, on déduit $S = \{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$.