Partie A :

Soit $f : x \to f(x) = e^{-\frac{1}{x}} + 1$, pour tout x réel non nul.

1/ Préciser le domaine de définition de f, sa continuité et dérivabilité.

- La fonction e^x est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc e^A est défini, continu et dérivable pour tout A réel, sous réserves que A soit lui-même défini, continu et dérivable (la fonction exponentielle répercute les propriétés de A).

La fonction $g \to g(x) = -\frac{1}{x}$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$, comme rapport de polynômes.

On conclue que $f \to f(x) = e^{-\frac{1}{x}} + 1$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$.

2/ Etudier les limites de f aux infinis. Que peut-on en déduire en termes d'asymptote ?

Soit C la courbe représentative de la fonction f.

Nous allons détailler le calcul des limites pour en assurer la compréhension.

- Si $x \to -\infty$, $-\frac{1}{x} \to 0^+$ ($-\frac{1}{x} > 0$).

La croissance de l'exponentielle conservant les ordres, on déduit : $e^{-\frac{1}{x}} \to 1^+$, puisque $e^0 = 1$.

D'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2^+$ (Asymptote horizontale $y = 2$ vers $-\infty$) .

La courbe C est <u>au dessus</u> de $y = 2$ vers $-\infty$.

- Si $x \to +\infty$, $-\frac{1}{x} \to 0^-$ ($-\frac{1}{x} < 0$).

La croissance de l'exponentielle conservant les ordres, on déduit : $e^{-\frac{1}{x}} \to 1^-$, puisque $e^0 = 1$.

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2^-$ (Asymptote horizontale $y = 2$ vers $+\infty$) .

La courbe C est <u>au dessous</u> de $y = 2$ vers $+\infty$).

3-a) Etudier les limites de f autour de la valeur $x = 0$. Que peut-on en déduire en termes d'asymptote ?

- Si $x \to 0^-$ ($x < 0$) : $-\frac{1}{x} \to +\infty$ et $e^{-\frac{1}{x}} \to +\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty$. On déduit une asymptote verticale $x = 0$, à gauche de $x = 0$.

- Si $x \to 0^+$ ($x > 0$) : $-\frac{1}{x} \to -\infty$ et $e^{-\frac{1}{x}} \to 0^+$, puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1^+$. Il n'y a pas d'asymptote verticale en $x = 0$, à droite de $x = 0$.

b) Peut-on en déduire une continuité partielle de f en $x = 0$?

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1^+$ autorise à poser $f(0) = 1$ et ainsi assurer la continuité de f en $x = 0$.

Le domaine devient $\mathbb{R}$, avec une cassure à gauche de $x = 0$ (asymptote verticale d'un seul côté de $x = 0$).

4-a) Etudier les variations de f sur son domaine de définition. Dresser un tableau de variation.

$f = e^u \Rightarrow f' = u'.e^u$. On sait aussi que $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, d'où $\left(-\frac{1}{x}\right)' = +\frac{1}{x^2}$.

On déduit : $f'(x) = u'.e^u = \frac{1}{x^2}.e^{-\frac{1}{x}} > 0$ sur $\mathbb{R} - \{0\}$.

La fonction f est partout croissante, avec une fracture en $x = 0$.

x	$-\infty$			0		$+\infty$
$f'(x)$		+		|1	+	
$f(x)$	2	↗	$+\infty$	|0	↗	2

b) En posant $f(0) = 1$, déterminer le taux de variation de f en $x = 0$, par valeurs positives ($x > 0$).

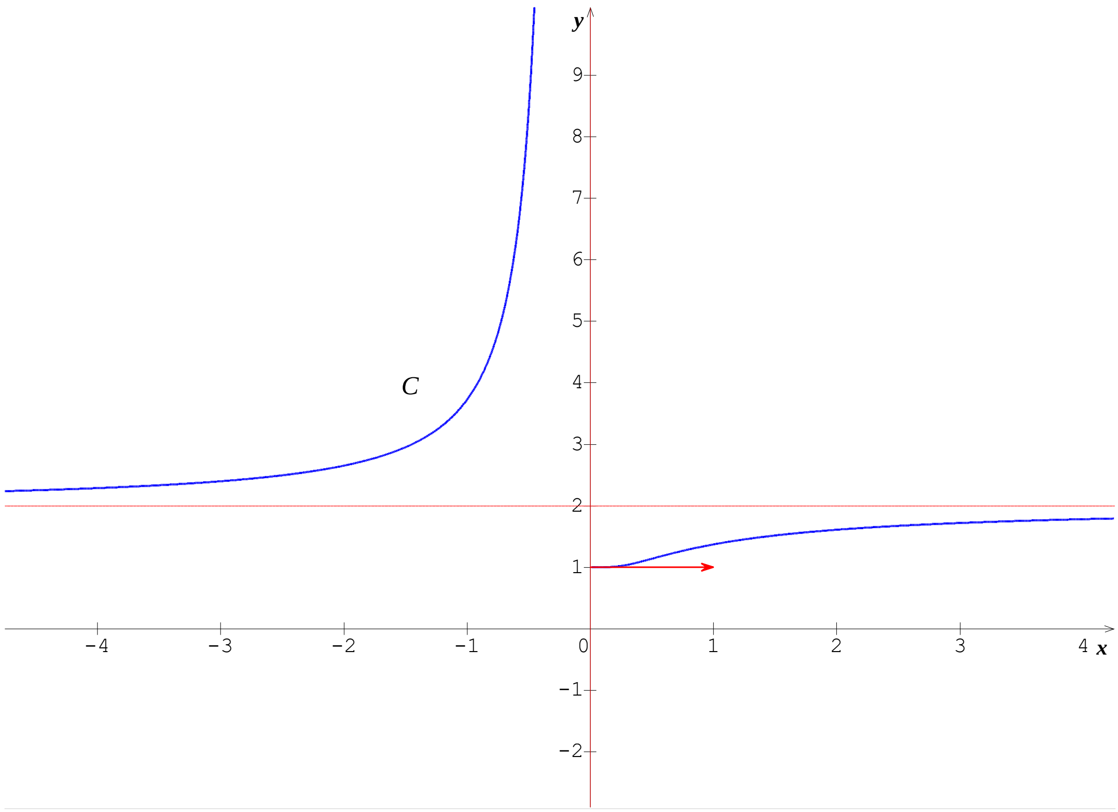
On a posé $f(0) = 1$.

La dérivée à droite en $x = 0$ est $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} = -\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(-\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$, indéterminé $\frac{0}{0}$.

Posons $X = -\frac{1}{x}$, $-\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(-\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} = -\lim\limits_{X \to -\infty} X.e^X = 0$, selon la règle des croissances comparées en $-\infty$.

On déduit $f'_d(0) = 0$, soit une tangente horizontale en $x = 0$ ($x > 0$) .

5/ Tracer la courbe représentative de f en précisant les asymptotes et tangentes dont il a été question.



Partie B :

Soit la suite u telle que $u_0 = +\frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout n entier naturel.

1/ Montrer que $1 \leq u_n \leq 2$, pour tout n non nul.

a) Graphiquement :

On constate sur la courbe précédente que $x \geq 0 \Rightarrow 1 \leq f(x) < 2$.

Comme $u_0 = \frac{1}{2} > 0$, sachant $u_1 = f(u_0)$, on déduit $1 \leq u_1 \leq 2$, et par récurrence $1 \leq u_n \leq 2$, pour tout n non nul.

b) Par récurrence :

Soit la proposition de récurrence $P(n)$: « $1 \leq u_n \leq 2$ » , pour tout n entier non nul.

- *Initialisation* : $u_1 = f(u_0) = f(\frac{1}{2}) = e^{-2} + 1 = 1 + \frac{1}{e^2}$ vérifie $1 \leq u_1 \leq 2$.

- *Hérédité* : Soit $P(n)$ vrai ($1 \leq u_n \leq 2$). Peut-on en déduire $P(n + 1)$ vrai ($1 \leq u_{n+1} \leq 2$) ?

$1 \leq u_n \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{u_n} \leq 1$, soit $-1 \leq -\frac{1}{u_n} \leq -\frac{1}{2}$, d'où : $e^{-1} \leq e^{-\frac{1}{u_n}} \leq e^{-\frac{1}{2}}$, l'exponentielle conservant les ordres.

On déduit : $1 \leq 1 + \frac{1}{e} \leq 1 + e^{-\frac{1}{u_n}} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{e}} \leq 2$.

- *Conclusion* : $P(n)$ est vraie pour tout entier n non nul.

2/ Montrer que la suite u est strictement croissante. Qu'en conclure ?

a) Graphiquement :

On sait que $x \geq 0 \Rightarrow 1 \leq f(x) < 2$. Comme $u_0 = \frac{1}{2} > 0$, on déduit $u_1 = f(u_0) \geq 1$, soit $u_0 \leq u_1$.

La fonction f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, donc $u_n \leq u_{n+1} \Rightarrow f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ soit $u_{n+1} \leq u_{n+2}$, ce qui établit l'hérédité qui montre que la suite u est croissante.

b) Par récurrence :

Soit la proposition de récurrence $P(n)$: « $u_n \leq u_{n+1}$ » , pour tout n entier non nul.

- *Initialisation* : $u_1 = f(u_0) = f(\frac{1}{2}) = e^{-2} + 1 = 1 + \frac{1}{e^2} \geq \frac{1}{2}$, soit $u_0 \leq u_1$.

- *Hérédité* : Soit $P(n)$ vrai ($u_n \leq u_{n+1}$). Peut-on en déduire $P(n + 1)$ vrai ($u_{n+1} \leq u_{n+2}$) ?

$1 \leq u_n \leq u_{n+1} \Rightarrow 0 < \frac{1}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{u_n} \leq 1$, soit $-1 \leq -\frac{1}{u_n} \leq -\frac{1}{u_{n+1}}$, d'où : $e^{-1} \leq e^{-\frac{1}{u_n}} \leq e^{-\frac{1}{u_{n+1}}}$, l'exponentielle conservant les ordres. On déduit : $1 + e^{-\frac{1}{u_n}} \leq 1 + e^{-\frac{1}{u_{n+1}}}$, soit $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

- *Conclusion* : $P(n)$ est vraie pour tout entier n non nul.

Conclusion : La suite u , strictement croissante, et majorée par 2 , converge vers une limite α , telle que $1 \leq \alpha \leq 2$.

3/ Donner une estimation de $\alpha = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

En passant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ à sa limite, pour n tendant vers $+\infty$, on déduit : $\alpha = f(\alpha)$.

$\alpha = f(\alpha) \Leftrightarrow f(\alpha) - \alpha = 0$. En posant $g(x) = f(x) - x$, la limite α est la solution de $g(x) = 0$ sur $[1 ; 2]$.

La calculatrice donne $\alpha \approx 1,517$.

n	u_n
0	0,5
1	1,13534
2	1,41445
3	1,49313
4	1,51184
5	1,51611
6	1,51707
7	1,51728
8	1,51733
9	1,51734
10	1,51734