Soit $f : x \to f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$, pour tout x réel.

1/ Préciser le domaine de définition de f, sa continuité et dérivabilité.

- La fonction e^x est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc e^A est défini, continu et dérivable pour tout A réel, sous réserves que A soit lui-même défini, continu et dérivable (la fonction exponentielle répercute les propriétés de A).

La fonction $g \to g(x) = \frac{1}{1-x}$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$, comme rapport de polynômes.

On conclue que $f \to f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

2/ Etudier les limites de f aux infinis. Que peut-on en déduire en termes d'asymptote ?

Soit C la courbe représentative de la fonction f.

Nous allons détailler le calcul des limites pour en assurer la compréhension.

- Si $x \to -\infty$, $1 - x \to +\infty$, d'où : $\frac{1}{1-x} \to 0^+$ ($\frac{1}{1-x} > 0$).

La croissance de l'exponentielle conservant les ordres, on déduit : $e^{\frac{1}{1-x}} \to 1^+$, puisque $e^0 = 1$.

D'où : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1^+$ (Asymptote horizontale $y = 1$ vers $-\infty$).

La courbe C est <u>au dessus</u> de $y = 1$ vers $-\infty$).

- Si $x \to +\infty$, $1 - x \to -\infty$, d'où : $\frac{1}{1-x} \to 0^-$ ($\frac{1}{1-x} < 0$).

La croissance de l'exponentielle conservant les ordres, on déduit : $e^{\frac{1}{1-x}} \to 1^-$, puisque $e^0 = 1$.

D'où : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1^-$ (Asymptote horizontale $y = 1$ vers $+\infty$).

La courbe C est <u>au dessous</u> de $y = 1$ vers $+\infty$.

3-a) Etudier les limites de f autour de la valeur $x = 1$. Que peut-on en déduire en termes d'asymptote ?

- Si $x \to 1^-$ $(x < 1)$: $1 - x \to 0^+$ $(1 - x > 0)$, d'où $\frac{1}{1-x} \to +\infty$ et $e^{\frac{1}{1-x}} \to +\infty$.

$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$. On déduit une asymptote verticale $x = 1$, à gauche de $x = 1$.

- Si $x \to 1^+$ $(x > 1)$: $1 - x \to 0^-$ $(1 - x < 0)$, d'où $\frac{1}{1-x} \to -\infty$ et $e^{\frac{1}{1-x}} \to 0^+$, puisque $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+$.

$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = 0^+$. Il n'y a pas d'asymptote verticale en $x = 1$, à droite de $x = 1$.

b) Peut-on en déduire une continuité partielle de f en $x = 1$?

$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = 0^+$ autorise à poser $f(1) = 0$ et ainsi assurer la continuité de f en $x = 1$.

Le domaine devient $\mathbb{R}$, avec une cassure à gauche de $x = 1$ (asymptote verticale d'un seul côté de $x = 1$).

4-a) Etudier les variations de f sur son domaine de définition. Dresser un tableau de variation.

$f = e^u \Rightarrow f' = u'.e^u$. On sait aussi que $\left(\frac{1}{U}\right)' = -\frac{U'}{U^2}$, d'où $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = -\frac{-1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

On déduit : $f'(x) = u'.e^u = \frac{1}{(1-x)^2}.\, e^{\frac{1}{1-x}} > 0$ sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

La fonction f est partout croissante, avec une fracture en $x = 1$.

x	$-\infty$			-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$\vert 0$	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$	$\vert 0$	$\nearrow$	1

b) En posant $f(1) = 0$, déterminer le taux de variation de f en $x = 1$, par valeurs positives ($x > 1$).

On a posé $f(1) = 0$.

La dérivée à droite en $x = 1$ est $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{f(x)}{x - 1} = -\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{1}{1-x}\, e^{\frac{1}{1-x}}$ indéterminé $\frac{0}{0}$.

Posons $X = \frac{1}{1-x}$, $-\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{1}{1-x}\, e^{\frac{1}{1-x}} = -\lim\limits_{X \to -\infty} X.e^X = 0$, selon la règle des croissances comparées en $-\infty$.

On déduit $f'_d(1) = 0$, soit une tangente horizontale en $x = 1$ ($x > 1$) .

5/ Tracer la courbe représentative de f en précisant les asymptotes et tangentes dont il a été question.