Soit $f : x \to f(x) = e^{\frac{x}{1+x^2}}$.

1/ Préciser le domaine de définition de f, puis étudier la parité de f.

Domaine de définition de f :

$X = \dfrac{x}{1+x^2}$ est calculable pour tout valeur réelle de x .

e^X est calculable pour toute valeur réelle de x , donc $f(x) = e^{\frac{x}{1+x^2}}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Etude de la parité de f :

Soit $g(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. On constate que $g(-x) = \dfrac{-x}{1+x^2} = -\dfrac{x}{1+x^2} = -g(x)$ pour toute valeur réelle de x .

La fonction g est *impaire* , mais la fonction e^X ne répercute pas cette propriété, car $e^{-X} = \dfrac{1}{e^X}$.

f n'est ni paire, ni impaire. A titre de contre-exemple : $f(+1) = e^{1/2} = \sqrt{e} \approx 1{,}65$, alors que $f(-1) = e^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{e}} \approx 0{,}61$.

2/ Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{1+x^2} = 0$ (rapport des plus hauts degrés), d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{x}{1+x^2}} = e^0 = 1$, par continuité de e^x en 0 .

De même : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. On déduit l'existence d'une asymptote horizontale $y = 1$ aux infinis.

3/ Déterminer la dérivée $f'(x)$, et préciser le sens de variation de f .

La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, comme composée de fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

On sait que $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ et que $(e^u)' = u'.e^u$, d'où : $f'(x) = \left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)' . e^{\frac{x}{1+x^2}} = \dfrac{1\times(1+x^2) - 2x\times x}{(1+x^2)^2} . e^{\frac{x}{1+x^2}}$,

$f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} . e^{\frac{x}{1+x^2}}$.

Recherche des extrema : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0$, soit $\begin{cases} x = -1 \text{ , } f(-1) = \dfrac{1}{\sqrt{e}} \\ x = +1 \text{ , } f(+1) = \sqrt{e} \end{cases}$.

Signe de la dérivée : $f'(x)$ est du signe de $1 - x^2$, soit $-x^2 + 1$.

Tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↘	$e^{-1/2}$	↗	$e^{1/2}$	↘	1

4/ Tracer sa courbe représentative C_f dans un repère orthonormé du plan.