Soit la fonction f telle que, pour tout réel $x \neq 2$, $f(x) = \frac{1}{x-2} e^{\frac{1}{x-2}}$, et $f(2) = 0$.

On appellera C sa courbe représentative.

1/ Déterminer les limites aux infinis de la fonction f.

- Si $x \to -\infty$: $x - 2 \to -\infty$, $\frac{1}{x-2} \to 0$ et $e^{\frac{1}{x-2}} \to e^0 = 1$.
- Si $x \to +\infty$: $x - 2 \to +\infty$, $\frac{1}{x-2} \to 0$ et $e^{\frac{1}{x-2}} \to e^0 = 1$.

La courbe C présente une asymptote horizontale $y = 0$.

2/ Déterminer les limites en $x = 2$ de la fonction f, par valeurs inférieures et par valeurs supérieures.

- Si $x \to 2$ $(x < 2)$: $x - 2 \to 0$ par valeurs négatives, donc $\frac{1}{x-2} \to -\infty$ et $e^{\frac{1}{x-2}} \to 0$.

  Le produit est *indéterminé* de forme $0 \times \infty$.

  Posons $X = \frac{1}{x-2}$, avec X tendant vers $-\infty$. On sait qu'alors $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim\limits_{X \to -\infty} Xe^X = 0$.

- Si $x \to 2$ $(x > 2)$: $x - 2 \to 0$ par valeurs positives, donc $\frac{1}{x-2} \to +\infty$ et $e^{\frac{1}{x-2}} \to +\infty$.

  On déduit : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$ (Asymptote verticale à droite en $x = 2$) .

Peut-on parler de continuité en $x = 2$?

On vient de voir qu'en $x = 2$, par valeurs positives, il existait une asymptote verticale, donc une discontinuité.

Par contre, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = 0 = f(2)$. La fonction est continue à gauche en $x = 2$.

3/ Vérifier que $f'(x) = -\frac{x-1}{(x-2)^3} e^{\frac{1}{x-2}}$.

$f = u.v$, soit $f' = u'v + uv'$, avec $u(x) = \frac{1}{x-2}$ et $v(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$.

On sait que $(\frac{1}{U})' = -\frac{U'}{U^2}$ et $(e^V)' = V'.e^V$.

D'où : $f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} \times e^{\frac{1}{x-2}} + \left[-\frac{1}{(x-2)^2} \times e^{\frac{1}{x-2}}\right] \times \frac{1}{x-2}$, soit $f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} \times e^{\frac{1}{x-2}} - \frac{1}{(x-2)^3} \times e^{\frac{1}{x-2}}$.

$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^3} \times e^{\frac{1}{x-2}} [(x-2) + 1] = -\frac{x-1}{(x-2)^3} \times e^{\frac{1}{x-2}}$.

Préciser la tangente à C en $x = 2$, par valeurs inférieures.

Si on procède à partir de la dérivée : On cherche $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f'(x) = -\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \dfrac{x - 1}{(x-2)^3} \times e^{\frac{1}{x - 2}}$.

Si $x \to 2$, alors $x - 1 \to 1$.

Si $x \to 2$ $(x < 2)$, alors $x - 2 \to 0$ $(x < 0)$. Posons $X = \dfrac{1}{x - 2}$, soit $X \to -\infty$, on sait $\lim\limits_{X \to -\infty} X^3.e^X = 0$.

Conclusion : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f'(x) = 0$. Tangente horizontale $y = 0$ en $x = 2$, par valeurs négatives.

Si on procède par le taux de variation : On cherche $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \dfrac{f(x)}{x - 2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \dfrac{1}{(x-2)^2} \times e^{\frac{1}{x - 2}}$.

Le raisonnement avec $X = x - 2$ est identique au cas précédent. D'où : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 0$ (pente nulle).

La courbe C est continue à gauche en $x = 2$, telle que $f(2) = 0$, et rejoint ce point avec une tangente horizontale.

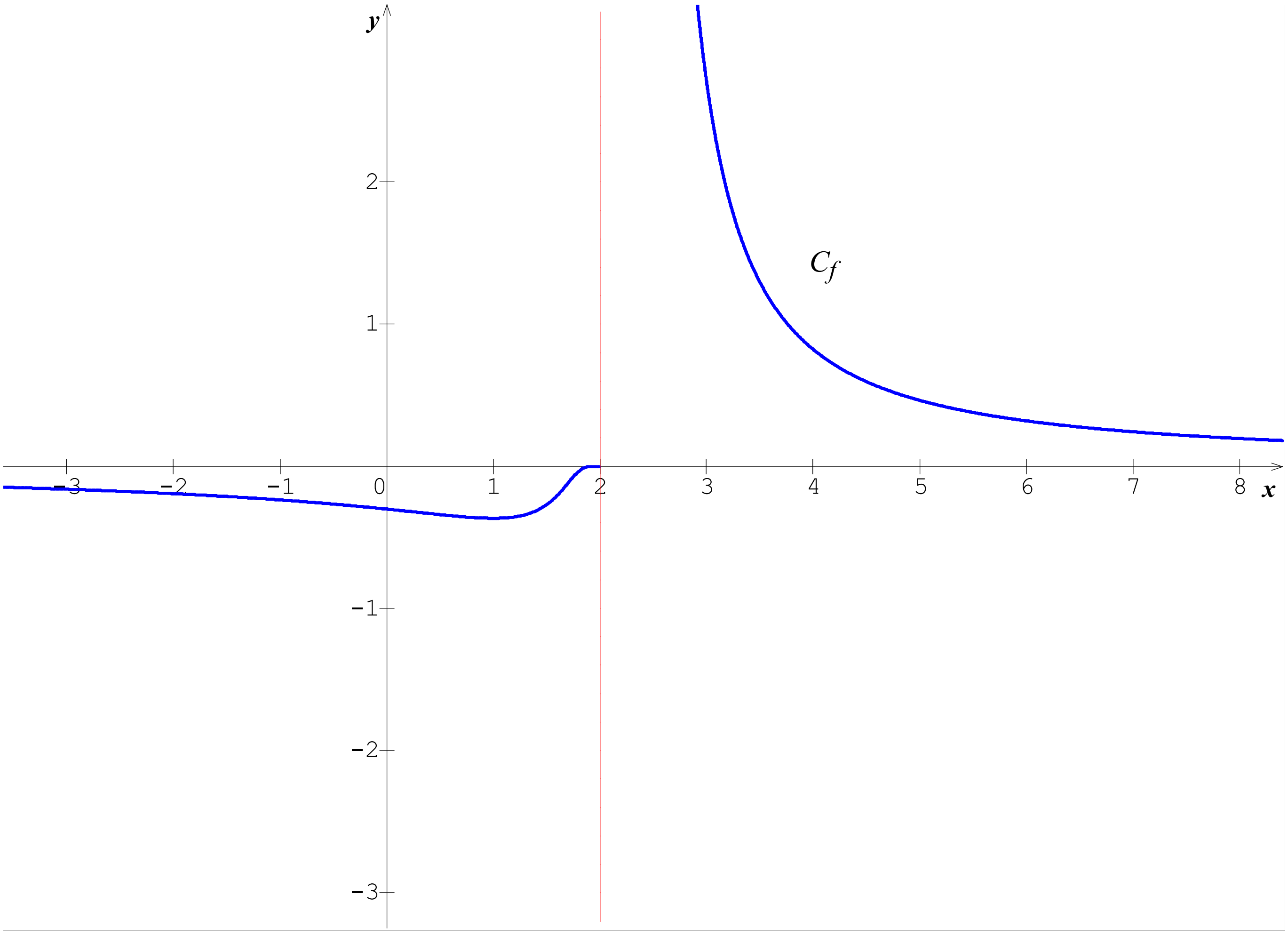
4/ Dresser le tableau de variation de la fonction f.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$, soit $x = 1$, avec $y = f(1) = -e^{-1} = -\dfrac{1}{e}$. Extremum $E(1, -\dfrac{1}{e})$.

Signe de $f'(x)$ identique à celui de $\dfrac{-x + 1}{x - 2}$, soit $\begin{cases} f'(x) < 0 \text{ sur }]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[\\ f'(x) > 0 \text{ sur }]1, 2[\end{cases}$.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	0 ||	–	
$f(x)$	0	↘	$-1/e$	↗	0 || $+\infty$	↘	0

5/ Tracer sa courbe représentative. ***Voir page suivante.***


y
x
C_f
2
1
-1
-2
-3
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8