Soit la fonction f telle que, pour tout x réel, $f(x) = \dfrac{x^2 - e^{-x}}{x^2 + e^{-x}}$.

1/ Déterminer ses limites aux bornes de son domaine de définition.

On sait $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$.

Si $x \to -\infty$: $e^{-x} \to +\infty$, $\begin{cases} \text{le numérateur } x^2 - e^{-x} \text{ est indéterminé } \infty - \infty \\ \text{le dénominateur tend vers } +\infty \end{cases}$.

$$f(x) = \frac{x^2 - e^{-x}}{x^2 + e^{-x}} = \frac{e^x(x^2 - e^{-x})}{e^x(x^2 + e^{-x})} = \frac{x^2e^x - 1}{x^2e^x + 1} \text{ sachant } e^xe^{-x} = e^0 = 1 .$$

On sait aussi que $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2e^x = 0$, d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{-1}{+1} = -1$.

Si $x \to +\infty$: alors $-x \to -\infty$ et $e^{-x} \to 0$.

$$f(x) = \frac{x^2 - e^{-x}}{x^2 + e^{-x}} = \frac{x^2(1 - \frac{e^{-x}}{x^2})}{x^2(1 + \frac{e^{-x}}{x^2})} = \frac{1 - \frac{e^{-x}}{x^2}}{1 + \frac{e^{-x}}{x^2}} = \frac{+1}{+1} = +1 \text{ , puisque } \begin{cases} e^{-x} \to 0 \\ x^2 \to +\infty \end{cases} \Rightarrow \frac{e^{-x}}{x^2} \to 0 . \text{ D'où : } \lim_{x \to =-\infty} f(x) = +1 .$$

Qu'en déduire en termes d'asymptotes ?

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1 \Leftrightarrow$ demi asymptote horizontale $y = -1$.

$\lim\limits_{x \to =-\infty} f(x) = +1 \Leftrightarrow$ demi asymptote horizontale $y = +1$.

2/ Vérifier que $f'(x) = \dfrac{2x(2 + x)e^{-x}}{(x^2 + e^{-x})^2}$, puis dresser son tableau de variation.

$f = \dfrac{u}{v} \Rightarrow f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, $(e^u)' = u'.e^u$, d'où : $(e^{-x})' = -e^{-x}$.

$$f(x) = \frac{x^2 - e^{-x}}{x^2 + e^{-x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x + e^{-x})(x^2 + e^{-x}) - (2x - e^{-x})(x^2 - e^{-x})}{(x^2 + e^{-x})^2} = \frac{(2x^3 + 2xe^{-x} + x^2e^{-x} + e^{-2x}) - (2x^3 - 2xe^{-x} - x^2e^{-x} + e^{-2x})}{(x^2 + e^{-x})^2} ,$$

$$f'(x) = \frac{4xe^{-x} + 2x^2e^{-x}}{(x^2 + e^{-x})^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(2 + x)e^{-x}}{(x^2 + e^{-x})^2} .$$

Variations de f : $f'(x)$ est du signe de $x(2 + x)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 , y = f(0) = -1 \\ x = -2 , y = f(-2) = \dfrac{4 - e^2}{4 + e^2} \approx -0{,}3 \end{cases} .$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
$f(x)$	-1	↗	-0,3	↘	-1	↗	+1

3/ Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α unique, située sur]0 ; 1[.

D'après le tableau de variation :

f continue, est de maximum $y = -0{,}3$ sur $]-\infty\,;0[$, donc n'est jamais nulle sur cet intervalle.

Sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, f est <u>continue et strictement croissante</u> , telle que $f(0) = -1$ et $\lim\limits_{x \to =-\infty} f(x) = +1$.

Le *théorème de la valeur intermédiaire* prouve l'existence d'une solution $\alpha > 0$ unique à l'équation $f(x) = 0$.

Comme $\begin{cases} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = \dfrac{1 - e^{-1}}{1 + e^{-1}} = \dfrac{1 - \frac{1}{e}}{1 + \frac{1}{e}} = \dfrac{e - 1}{e + 1} \approx 0{,}46 > 0 \end{cases}$, on déduit $0 < \alpha < 1$.

4/ Tracer la courbe représentative de f .