On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = e^{1-n}$.

1/ Démontrer que (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera le premier terme et la raison.

$u_{n+1} = e^{1-(n+1)} = e^{(1-n)-1} = e^{1-n} \times e^{-1} = \dfrac{1}{e} \times e^{1-n}$. On déduit $u_{n+1} = \dfrac{1}{e}.u_n$.

Autre méthode : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{e^{1-(n+1)}}{e^{1-n}} = \dfrac{e^{1-n} \times e^{-1}}{e^{1-n}} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

La suite (u_n) est géométrique, de raison $q = \dfrac{1}{e}$, de premier terme $u_0 = e^{1-0} = e^1 = e$.

2/ La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, préciser sa limite.

$q = \dfrac{1}{e}$, avec $e \approx 2\,;718$, donc $|\, q \,| < 1$ (la valeur absolue est nécessaire, sinon $q = -2 < 1$ divergerait).

On peut aussi dire $-1 < q < +1$.

La suite géométrique (u_n) est convergente vers 0 ($u_n = u_0.q^n = e.\left(\dfrac{1}{e}\right)^n = \dfrac{e}{e^n} \to 0$, lorsque $n \to +\infty$).

On retrouve bien $u_n = \dfrac{e}{e^n} = e^1 \times e^{-n} = e^{1-n}$.

3/ On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que $S_n = \dfrac{e^2}{e-1}(1 - e^{-n-1})$.

On sait $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (1^{er} terme $\times \dfrac{1-q^{\text{nbre de termes}}}{1-q}$, $q \neq 1$).

$$S_n = e\,\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{e}} = e \times \frac{1-e^{-n-1}}{1-e^{-1}} = e^2 \times \frac{1-e^{-n-1}}{e(1-e^{-1})} = e^2 \times \frac{1-e^{-n-1}}{e-1} = \boldsymbol{\frac{e^2}{e-1}(1-e^{-n-1})}\ .$$

Calculer la limite de la suite S_n .

Si $n \to +\infty$: $e^{-n-1} = \dfrac{1}{e^{n+1}} \to 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{e^2}{e-1}$.

Remarque : On sait que pour une suite géométrique de raisons q , telle que $|\, q \,| < 1$, donc convergente, la limite infinie de la somme S_n de ses termes est elle-même convergente, et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{u_0}{1-q}$, soit ici $\dfrac{e}{1-\frac{1}{e}} = \dfrac{e^2}{e-1}$.