Résoudre dans ℝ :

a) $e^{1-\frac{1}{x}} > 1$

Le domaine de définition impose $x \neq 0$.

$e^A > e^B \Leftrightarrow A > B$, donc : $e^{1-\frac{1}{x}} > e^0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} > 0$, soit $\frac{x-1}{x} > 0$.

Un tableau de signes donne : $x < 0$ ou $x > 1$, soit $S =]-\infty ; 0[\cup]1 ; +\infty[$.

b) $e^x < \frac{16}{e^x}$

Sachant $e^x > 0$: $e^x < \frac{16}{e^x} \Leftrightarrow e^{2x} < 16$ soit $2x < \ln(16)$.

$2x < \ln(2^4) \Leftrightarrow 2x < 4\ln(2) \Leftrightarrow x < 2\ln(2)$. D'où : $S =]-\infty ; 2\ln(2)[$.

c) $e^x \geq \frac{2-e^x}{e^x}$

Sachant $e^x > 0$: $e^x \geq \frac{2-e^x}{e^x} \Leftrightarrow e^{2x} \geq 2 - e^x \Leftrightarrow e^{2x} + e^x - 2 \geq 0$.

On pose $X = e^x$: $X^2 + X - 2 \geq 0$, ce qui impose $X \leq -2$ ou $X \geq +1$ (racines du trinôme).

$e^x \leq -2$ est impossible, tandis que $e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \ln(1)$, soit $x \geq 0$. D'où : $S = [0 ; +\infty[$.

d) $e^{\frac{2}{x}} - 2e^{\frac{1}{x}} - 3 \geq 0$

Le domaine de définition impose $x \neq 0$.

Posons $X = e^{\frac{1}{x}}$. L'équation devient $X^2 - 2X - 3 \geq 0$.

Les racines du trinôme sont $X = -1$ et $X = +3$, ce qui impose $X \leq -1$ ou $X \geq +3$.

$e^{\frac{1}{x}} \leq -1$ est impossible, tandis que $e^{\frac{1}{x}} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq \ln(3)$ ou $\frac{x.\ln(3) - 1}{x} \leq 0$.

On remarquera que l'on a pas fait de produit $\boldsymbol{\frac{1}{x} \geq \ln(3) \Leftrightarrow x.\ln(3) \leq 1}$ ***car on ne connait pas le signe de x qui peut très bien être négatif.***

Un tableau de signes donne : $x < 0$ ou $x \geq \frac{1}{\ln(3)}$, soit $S =]-\infty ; 0[\cup [\frac{1}{\ln(3)} ; +\infty[$.

e) $e^{2x+1} - 5e^{x+1} < 6e$

$e^{2x+1} - 5e^{x+1} < 6e \Leftrightarrow e(e^{2x}) - 5e(e^x) < 6e \Leftrightarrow e^{2x} - 5e^x - 6 < 0$.

On pose $X = e^x$: $X^2 - 5X - 6 \geq 0$, ce qui impose $-1 \leq X \leq +6$ (racines du trinôme).

$e^x \leq 0$ est impossible, ce qui impose $0 < e^x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq \ln(6)$. D'où : $S =]-\infty ; \ln(6)]$.

On pourrait écrire $\ln(6) = \ln(2) + \ln(3)$.