On considère un entier n qui n'est pas un carré parfait (c'est-à-dire qui n'est pas le carré d'un autre entier).

1/ Justifier que dans la décomposition de n en produit de facteurs premiers, il existe un nombre premier p dont l'exposant est impair.

Soit $n = p_1^{\alpha 1} \times p_2^{\alpha 2} \times \ldots \times p_{k-1}^{\alpha k-1} \times p_k^{\alpha k}$, la décomposition de n en un produit de k nombres premiers p_i, chacun étant de multiplicité α_i.

Supposons que chaque nombre premier p_i soit de multiplicité α_i paire, soit $\alpha_i = 2\beta_i$, pour tout $i \in [1, k]$.

$n = p_1^{2\beta 1} \times p_2^{2\beta 2} \times \ldots \times p_{k-1}^{2\beta k-1} \times p_k^{2\beta k} = (p_1^{\beta 1} \times p_2^{\beta 2} \times \ldots \times p_{k-1}^{\beta k-1} \times p_k^{\beta k})^2$.

On constate que n est alors un carré parfait, en contradiction avec l'énoncé.

Donc, il existe un nombre premier p_i de multiplicité (exposant) impair.

2/ On suppose que $\sqrt{n}$ est rationnel, c'est-à-dire qu'il existe des entiers naturels a et b, avec $b \neq 0$, tels que $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$.

a) Quel est la parité de l'exposant de p dans la décomposition de nb^2 ?

Dans b^2 la parité de p ne peut être que paire, donc « pair + impair = impair », la parité de p dans nb^2 est impaire.

b) Quelle est la parité de tous les exposants dans la décomposition de a^2 ?

La parité de chaque exposant premier dans la décomposition de a^2 ne peut être que paire.

c) Que dire de l'égalité $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$?

$\sqrt{n} = \frac{a}{b} \Rightarrow a^2 = nb^2$.

On ne peut avoir d'égalité entre deux nombres dont la décomposition en nombres premiers n'est pas identique, donc de même multiplicité, donc l'égalité est impossible.

3/ Enoncer la propriété que l'on vient de montrer.

On conclue : La racine carrée d'un entier qui n'est pas un carré parfait est un nombre irrationnel.