On cherche à résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 + x + 1 \equiv 0\ [6]$.

1/ Quels sont les restes possibles de la division euclidienne d'un entier x par 6 .

Les restes possibles sont 0, 1, 2, 3, 4, 5 .

2/ En déduire les restes possibles de la division de x^2 par 6 .

Tableau des congruences de x et de x^2 , modulo 6 :

x	x^2
0	0
1	1
2	4
3	3
4	4
5	1

3/ Quel est l'ensemble des solutions de cette équation ?

1$^{\text{ère}}$ Méthode :

x	x^2	$x^2 + x + 1$
0	0	1
1	1	3
2	4	1
3	3	4
4	4	3
5	1	1

On constate qu'il est impossible de trouver un entier x tel que $x^2 + x + 1$ soit divisible par 6 .

2$^{\text{ème}}$ Méthode :

$6 = 2\times 3$, produit de deux nombres premiers.

Pour être divisible par 6 , il faut être simultanément divisible par 2 et 3 .

$x^2 + x + 1 = x(x + 1) + 1$.

$x(x + 1)$ produit de deux nombres consécutifs est nécessairement multiple de 2 , donc :

$x^2 + x + 1 = x(x + 1) + 1 \equiv 0\ [2] \Rightarrow 1 \equiv 0\ [2]$, ce qui est impossible.

Il est impossible de trouver un entier x tel que $x^2 + x + 1$ soit divisible par 6 .