Nombres de MERSENNE :

Pour n entier naturel non nul, on note M_n l'entier $M_n = 2^n - 1$.

1/ Pour $1 \leq n \leq 15$, quels sont les nombres M_n premiers ?

Les M_n premiers sont :

$M_2 = 2^2 - 1 = 3$; $M_3 = 2^3 - 1 = 7$; $M_5 = 2^5 - 1 = 31$; $M_7 = 2^7 - 1 = 127$; $M_{13} = 2^{13} - 1 = 8191$.

2-a) Soit k un entier naturel non nul, et a un entier quelconque. Montrer que $a - 1$ divise $a^k - 1$.

On sait que si $P(x)$ est un polynôme en x , et que $P(\alpha) = 0$, alors $x - \alpha$ se factorise dans $P(x)$.

$P(a) = a^k - 1$ vérifie $P(1) = 0$, donc $a - 1$ se factorise dans $P(a) = a^k - 1$.

Les coefficients de la factorisation sont entiers, donc $a - 1$ divise $a^k - 1$.

Vérification : Pour $a \neq 1$: $1 + a + a^2 + \ldots + a^{k-1} = \dfrac{a^k - 1}{a - 1}$.

b) En déduire que si d divise n , alors $2^d - 1$ divise M_n .

$d \mid n \Rightarrow n = d \times p$, avec $p \in \mathbb{N}$.

En posant $a = 2^d$, on déduit de 2-a) que $a - 1$ divise $a^p - 1$, soit $2^d - 1$ divise $(2^d)^p - 1$.

$2^d - 1$ divise $2^{d.p} - 1$, soit $2^d - 1 \mid 2^n - 1$, donc $2^d - 1$ divise M_n .

3/ Déduire de la question 2 que, si M_n est premier, alors n est premier.

Si n n'est pas premier, il admet un diviseur d autre que lui-même et 1 .

Dans ce cas, $2^d - 1$ divise $M_n = 2^n - 1$, d'après 2-b , donc M_n n'est pas premier.

On conclue que M_n premier implique que n est premier.

La réciproque est-elle vraie ?

La réciproque est fausse. <u>Contre-exemple</u> : $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$.

$n = 11$ est premier, et pourtant $M_{11} = 2017$ n'est pas premier.