Soit une suite numérique (u_n) telle que $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n}$, pour tout n entier naturel non nul.

Soit la proposition de récurrence $P(n)$: « $u_n = \dfrac{1}{(n-1)\,!}$ ».

1/ Démontrer que si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ l'est également. Comment s'appelle cette démarche ?

Supposons $P(n)$ vraie ($u_n = \dfrac{1}{(n-1)\,!}$). Peut-on en déduire $P(n+1)$ vraie ($u_{n+1} = \dfrac{1}{n\,!}$) ?

$u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n} = \dfrac{\frac{1}{(n-1)\,!}}{n}$, puisque $P(n)$ est supposée vraie.

$u_{n+1} = \dfrac{1}{(n-1)\,!} \times \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n \times (n-1)\,!} = \dfrac{1}{n\,!}$.

On a prouvé que **si** $P(n)$ est vraie, **alors** $P(n+1)$ est vraie (*Hérédité*).

2/ Peut-on en déduire que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n ? Expliquer.

La démonstration de l'hérédité ne suffit pas à prouver que la récurrence est vraie, donc que $P(n)$ est vraie pour tout n.

Il faut tout d'abord *Initialiser* le processus de récurrence, par exemple en prouvant que $P(1)$ est vraie.

$P(1)$ dit : « $u_1 = \dfrac{1}{0\,!} = \dfrac{1}{1} = 1$ », alors qu'on sait que $u_1 = 2$.

On ne peut donc conclure que $u_n = \dfrac{1}{(n-1)\,!}$, pour tout $n \geq 1$.

La formule correcte serait : $u_n = \dfrac{2}{(n-1)\,!}$.