1/ Démontrer par récurrence que pour tout n entier naturel, 6 divise $n^3 + 5n$.

Soit la relation de récurrence $P(n)$: « 6 divise $n^3 + 5n$ » , aussi notée « $6 \mid n^3 + 5n$ » .

Initialisation : $P(1)$ dit ; « $6 \mid 1^3 + 5\times1$ », soit $6 \mid 6$. Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie, soit « $6 \mid n^3 + 5n$ » . Peut-on en déduire $P(n + 1)$ vraie, soit $6 \mid (n + 1)^3 + 5(n + 1)$?

On sait que $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, donc : $(n + 1)^3 + 5(n + 1) = n^3 + 3n^2 + 8n + 6$.

$(n + 1)^3 + 5(n + 1) = (n^3 + 5n) + 3n^2 + 3n + 6 = (n^3 + 5n) + 3(n^2 + 3n) + 6$,

$(n + 1)^3 + 5(n + 1) = (n^3 + 5n) + 3n(n + 1) + 6$.

Ayant supposé que $6 \mid n^3 + 5n$, et sachant que 2 divise le produit $n(n + 1)$ de deux nombres consécutifs, on déduit que 6 divise $3n(n + 1) + 6$, soit $6 \mid (n + 1)^3 + 5(n + 1)$.

<u>Attention</u> : *Ce n'est pas parce qu'on est divisible par 4 et 6 qu'on l'est par 24 .*

36 *est divisible séparément par* 4 *et* 6 *, mais ne l'est pas par* $4\times6 = 24$.

Les deux diviseurs doivent être premiers entre eux (sans diviseur commun).

On a bien prouvé que $P(n)$ vrai implique $P(n + 1)$ vrai.

Conclusion : Partant de $P(1)$ vrai, l'hérédité permet de conclure que $P(n)$ est vrai pour tout n entier naturel.

2/ Retrouver directement le résultat à l'aide de critères de divisibilité.

$n^3 + 5n = (n^3 - n) + 6n = n(n^2 - 1) + 6n = (n - 1).n.(n + 1) + 6n$.

2 divise le produit de deux entiers consécutifs $n(n + 1)$, donc divise $(n - 1).n.(n + 1) + 6n$.

3 divise le produit de trois entiers consécutifs $(n- 1).n.(n + 1)$, donc divise $(n - 1).n.(n + 1) + 6n$.

2 et 3 étant premiers entre eux, on déduit que $2\times3 = 6$ divise $(n - 1).n.(n + 1) + 6n$.

Conclusion : $6 \mid n^3 + 5n$.