Résoudre dans ℝ : $\sqrt{x} - \sqrt{x - 2} = 1$.

- **Conditions d'Existence :**

Une racine carrée n'est calculable que si la quantité dont on prend la racine (radicande) est positive ou nulle.

Ce qui impose $\begin{cases} x \geq 0 \\ \text{et} \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \text{et} \\ x \geq 2 \end{cases}$, soit $x \geq 2$.

Le domaine d'existence est $D = [2\ ; +\infty[$, et les éventuelles solutions de l'équation devront satisfaire cette condition.

Il faut maintenant se débarrasser des racines carrées, pour déterminer les solutions x :

Pour cela, nous allons devoir mettre au carré les deux membres de l'équation.

Attention : Une mise au carré $A = B \Rightarrow A^2 = B^2$ risque d'augmenter l'ensemble des solutions, en apportant également celles de $A = -B \Rightarrow A^2 = (-B)^2$: $A^2 = B^2 \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ \text{ou} \\ A = -B \end{cases}$.

Deux attitudes sont possibles :

- Directement résoudre $A^2 = B^2$, puis sélectionner les solutions x , qui correspondent à l'équation $A = B$, en éliminant les autres, qui correspondent à $A = -B$.
- Etablir une condition complémentaire, qui assure de se limiter aux solutions de $A = B$.

Ainsi : $A = -B$ signifie : $\sqrt{x} - \sqrt{x - 2} = -1$, qui ne peut avoir de solution, puisque $x > x – 2$, assure que $\sqrt{x} > \sqrt{x - 2}$, donc que $\sqrt{x} - \sqrt{x - 2}$ soit toujours positif ou nul, et non pas égal à -1 .

Conclusion : Les solutions de $(\sqrt{x} - \sqrt{x - 2})^2 = 1$, se limitent exactement à celles de $\sqrt{x} - \sqrt{x - 2} = 1$.

$$\sqrt{x} - \sqrt{x - 2} = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{x - 2})^2 = 1 \Leftrightarrow x + (x - 2) - 2\sqrt{x(x - 2)} = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x(x - 2)} = 2x - 3 .$$

On remarquera ce souci d'isoler la racine carrée, afin de faire définitivement disparaître les racines carrées dans une prochaine mise au carré, sinon on conserverait indéfiniment des doubles produits avec des racines.

La condition précédente $x \geq 2$ assure que $x(x - 2) \geq 0$, radicande de la racine, mais le résultat de cette racine doit aussi être positif ou nul, soit $2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$. Le domaine de définition devient $D' = [\frac{3}{2}\ ; +\infty[$

Mise au carré : $2\sqrt{x(x - 2)} = 2x – 3 \Rightarrow 4x(x - 2) = (2x – 3)^2$, soit $4x^2 - 8x = 4x^2 – 12x + 9$,

On déduit : $4x = 9$, soit $x = \frac{9}{4}$, qui satisfait $x \geq \frac{3}{2}$. La solution est $S = \{+\frac{9}{4}\}$.

2ème méthode, plus rapide, mais qui impose de vérifier si les solutions obtenues sont acceptées par l'équation initiale.

On ne se préoccupe d'aucune des conditions d'existence (regrettable, car l'analyse de l'équation permet souvent d'immédiatement conclure qu'il n'y a pas de solution).

$\sqrt{x} - \sqrt{x-2} = 1 \iff (\sqrt{x} - \sqrt{x-2})^2 = 1 \iff x + (x-2) - 2\sqrt{x(x-2)} = 1 \iff 2\sqrt{x(x-2)} = 2x - 3$,

$2\sqrt{x(x-2)} = 2x - 3 \Rightarrow 4x(x-2) = (2x-3)^2$, soit $4x^2 - 8x = 4x^2 - 12x + 9$,

On déduit : $4x = 9$, soit $x = \dfrac{9}{4}$.

Vérifions que $x = \dfrac{9}{4}$ est solution de $\sqrt{x} - \sqrt{x-2} = 1$.

$$\sqrt{\frac{9}{4}} + \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \sqrt{\frac{9}{4}} - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ VRAI.}$$